

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Marko Barišić

ZAGREB, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:

Marko Barišić

ZAGREB, 2018.

Veliku zahvalnost, prvenstveno, dugujem svom mentoru dr. sc. Josipu Kasaću što mi je omogućio rad na ovoj temi, te me vodio kroz sve faze izrade ovog rada i što je uvijek imao strpljenja za moje upite.

Posebnu zahvalnost želim iskazati svojoj obitelji, a ponajviše svojim roditeljima bez kojih ovo nebi bilo moguće.

Izjava

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, 2018

Marko Barišić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
 Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:
 proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,
 inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **MARKO BARIŠIĆ** Mat. br.: 0035193337

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Algebarski pristup identifikaciji parametara autonomnih letjelica u realnom vremenu**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Algebraic approach for real-time parameter identification of unmanned aerial vehicles**

Opis zadatka:

Konvencionalne metode identifikacije parametara u realnom vremenu imaju asimptotsku konvergenciju koja, između ostalog, ovisi i o početnim uvjetima dinamičkog sustava. S obzirom da je konvencionalna estimacija parametara u realnom vremenu inherentno nelinearan proces, vrlo je teško garantirati brzinu konvergencije parametara prema realnim vrijednostima. Ukoliko je identifikacija parametara u realnom vremenu podsustav adaptivne regulacije, nepoznata i promjenjiva brzina konvergencije parametara može imati bitan utjecaj na performanse regulacije. U ovom radu razmatra se algebarska metoda identifikacije parametara u realnom vremenu koja omogućuje praktički trenutnu estimaciju realnih parametara sustava. Algebarska metoda primijenjena je na problem identifikacije parametara autonomne letjelice u realnom vremenu.

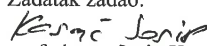
U radu je potrebno:

1. Implementirati konvencionalnu algebarsku metodu identifikacije parametara zasnovanu na metodi algebarskih derivacija.
2. Implementirati algebarsku metodu identifikacije parametara zasnovanu na metodi frekvencijskog pomaka.
3. Provesti komparativnu analizu stabilnosti i robusnosti na šum mjerenja metode algebarskih derivacija i metode frekvencijskog pomaka.
4. Algebarsku metodu identifikacije primjenom metode frekvencijskog pomaka primijeniti u sintezi adaptivnog regulatora autonomne letjelice.
5. Zaključak.

Zadatak zadan:
03. svibnja 2018.

Rok predaje rada:
05. srpnja 2018.

Predviđeni datum obrane:
11. srpnja 2018.
12. srpnja 2018.
13. srpnja 2018.

Zadatak zadao:

 prof. dr. sc. Josip Kasać

Predsjednica Povjerenstva:

 prof. dr. sc. Biserka Runje

Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis oznaka	x
Popis oznaka	xii
Sažetak	xii
Summary	xiii
1. Uvod	1
1.1. Algebarska estimacija parametara	1
1.2. Objekt upravljanja	2
1.3. Organizacija po poglavljima	3
2. Algebarske metode identifikacije parametara	4
2.1. Asimptotska metoda algebarske identifikacije	4
2.1.1. Invarijantno filtriranje s različitim polovima	4
2.1.2. Invarijantno filtriranje s višestrukim polom	10
2.2. Neasimptotske metode algebarske identifikacije	13
2.2.1. Metoda algebarskog deriviranja	13
2.2.2. Metoda frekvencijskog pomaka	16

2.2.3. Invarijantno filtriranje s različitim polovima	19
2.2.4. Invarijantno filtriranje s višestrukim polom	23
2.3. Usporedba metoda	26
3. Dinamički model autonomne letjelice	30
3.1. Uvod	30
3.2. Definicije	30
3.3. Konfiguracije rotokoptera	31
3.3.1. Konvencionalna konfiguracija s glavnim rotorom i rotorom na repu	31
3.3.2. Konfiguracija s jednim rotorom	32
3.3.3. Konfiguracija s dvostrukim koaksijalnim rotorima	32
3.3.4. Konfiguracija s dvostrukim rotorom jedan pokraj drugoga	32
3.3.5. Multirotor	32
3.4. Osnovni koncepti kvadkoptera	33
3.5. Kinematika i dinamika	36
3.5.1. Referentni koordinatni sustav	36
3.5.2. Rotacijske matrice	37
3.5.3. Koordinatni sustavi kvadkoptera	39
3.5.4. Kinematika	41
3.5.5. Dinamika krutog tijela	42
3.5.6. Sile i momenti	45
3.6. Pojednostavljeni modeli	47
3.7. Upravljanje	49
4. Algebarska identifikacija parametara letjelice	53
4.1. Identifikacija mase	53
4.2. Identifikacija momenata tromosti	57
5. Simulacijski rezultati	60
6. Zaključak	83
A. Prilog	84
Literatura	85

Popis slika

2.1	Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 1$ i početnu poziciju $y_0 = 0$	8
2.2	Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$	9
2.3	Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$, $\epsilon = 2$	9
2.4	Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$, $\epsilon = 2$ i tri puta uvećanom amplitudom šuma.	10
2.5	Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s višestrukim polovom za početnu brzinu $v_0 = 1$ i početnu poziciju $y_0 = 0$	12
2.6	Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s višestrukim polovom za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$	13
2.7	Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode algebarskog deriviranja pri počenoj brzini $v_0 = 1$, a početnoj poziciji $y_0 = 0$	17
2.8	Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode algebarskog deriviranja pri počenoj brzini $v_0 = 0$, a početnoj poziciji $y_0 = 1$	17
2.9	Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s različitim polovima pri počenoj brzini $v_0 = 1$, a početnoj poziciji $y_0 = 0$	22

2.10	Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s različitim polovima pri početnoj brzini $v_0 = 0$, a početnoj poziciji $y_0 = 1$	22
2.11	Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s višestrukim polom pri početnoj brzini $v_0 = 1$, a početnoj poziciji $y_0 = 0$	25
2.12	Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s višestrukim polom pri početnoj brzini $v_0 = 0$, a početnoj poziciji $y_0 = 1$	26
2.13	Usporedba performansi metode algebarskog deriviranja(ADM), i frequency-shifting pristupa s različitim(FSRP) i višestrukim polovima(FSIP) pri početnoj brzini $v_0 = 0$ i $y_0 = 1$	27
2.14	Usporedba performansi asimptotske metode pri filtriranju različitim polovima(IFRP) i višestrukim polom(IFIP) pri početnoj brzini $v_0 = 0$ i $y_0 = 1$	28
2.15	Usporedba performansi metode algebarskog deriviranja(ADM), i frequency-shifting pristupa s različitim(FSRP) i višestrukim polovima(FSIP) pri početnoj brzini $v_0 = 1$ i $y_0 = 0$	28
2.16	Usporedba performansi asimptotske metode pri filtriranju različitim polovima(IFRP) i višestrukim polom(IFIP) pri početnoj brzini $v_1 = 0$ i $y_0 = 0$	29
3.1	Kvadkopter [16]	33
3.2	Kvadkopter u modu lebdenja	34
3.3	Potisak	35
3.4	Valjanje	35
3.5	Poniranje	36
3.6	Skretanje	37
3.7	Rotacija u 2D	38
3.8	Inercijalni koordinatni sustav	39
3.9	Model kvadkoptera	44
3.10	Sile i momenti	45
5.1	Varijable stanja punog dinamičkog modela kvadkoptera	61

5.2	Slijeđene referentne trajektorije za puni dinamički model	62
5.3	Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela	62
5.4	Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod punog dinamičkog modela	63
5.5	Varijable stanja pojednostavljenog dinamičkog modela kvadkoptera	63
5.6	Slijeđene referentne trajektorije za pojednostavljeni dinamički model	64
5.7	Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela	64
5.8	Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod pojednostavljenog dinamičkog modela	65
5.9	Varijable stanja najjednostavnijeg dinamičkog modela kvadkoptera	65
5.10	Slijeđene referentne trajektorije za najjednostavniji dinamički model	66
5.11	Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela	66
5.12	Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod najjednostavnijeg dinamičkog modela	67
5.13	Identificirani parametri za pojednostavljeni model	68
5.14	Identificirani parametri za pojednostavljeni model s uvećanjem	68
5.15	Identificirani parametri za puni model	69
5.16	Identificirani parametri za puni model s uvećanjem	69
5.17	Identificirani parametri za najjednostavniji model	70
5.18	Identificirani parametri za najjednostavniji model s uvećanjem	70
5.19	Signali s dodanim šumom	71
5.20	Identificirani parametri za pojednostavljeni model uz dodani šum	71
5.21	Identificirani parametri za pojednostavljeni model s uvećanjem uz dodani šum	72
5.22	Identificirani parametri za puni model uz dodani šum	73
5.23	Identificirani parametri za puni model s uvećanjem uz dodani šum	73
5.24	Identificirani parametri za najjednostavniji model uz dodani šum	74
5.25	Identificirani parametri za najjednostavniji model s uvećanjem uz dodani šum	75
5.26	Varijable stanja punog dinamičkog modela kvadkoptera uz upravljanje s identificiranim parametrima	75
5.27	Slijeđene referentne trajektorije za puni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima	76

5.28	Neadaptivno slijeđene referentne trajektorije za puni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima	76
5.29	Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima	77
5.30	Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima	77
5.31	Varijable stanja pojednostavljenog dinamičkog modela kvadkoptera uz upravljanje s identificiranim parametrima	78
5.32	Slijeđene referentne trajektorije za pojednostavljeni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima	78
5.33	Neadaptivno slijeđene referentne trajektorije za pojednostavljeni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima	79
5.34	Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima	79
5.35	Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod pojednostavljenog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima	80
5.36	Varijable stanja najjednostavnijeg dinamičkog modela kvadkoptera uz upravljanje s identificiranim parametrima	80
5.37	Slijeđene referentne trajektorije za najjednostavniji dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima	81
5.38	Neadaptivno slijeđene referentne trajektorije za najjednostavniji dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima	81
5.39	Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima	82
5.40	Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod najjednostavnijeg dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima	82

Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
\mathcal{F}^i	-	Inercijalni koordinatni sustav
\mathcal{F}^v	-	Koordinatni sustav vozila
\mathcal{F}^{v1}	-	Koordinatni sustav vozila 1
\mathcal{F}^{v2}	-	Koordinatni sustav vozila 2
\mathcal{F}^b	-	Koordinatni sustav vozila b
I	kgm ²	Matrica inercija
k	N/m	Konstanta opruge
M_x	Nm	Moment sile oko x osi referentnog okvira quadrotora
M_y	Nm	Moment sile oko y osi referentnog okvira quadrotora
M_z	Nm	Moment sile oko z osi referentnog okvira quadrotora
m	kg	Masa
R	-	Rotacijska matrica
$\mathbf{v} = (u, v, w)^T$	m/s	Vektor brzine
θ	rad	Kut poniranja
$\boldsymbol{\xi} = (x, y, z)^T$	m	Vektor pozicije
τ	Nm	Moment koji proizvodi pojedini motor
ϕ	rad	Kut valjanja
ψ	rad	Kut skretanja
$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$	rad/s	Vektor kutnih bezina

Sažetak

U ovom radu razmatrana je algebarska metoda identifikacije parametara u realnom vremenu. Algebarska metoda omogućuje skoro trenutnu estimaciju realnih parametara sustava te je stoga primijenjena na problem identifikacije parametara autonomne letjelice u realnom vremenu. U prvom dijelu rada na modelu mehaničkog oscilatora implementirane su asimptotske metode algebarske identifikacije te zatim ne asimptotska konvencionalna metoda identifikacije parametara zasnovana na algebarskim derivacijama. Implementirana je također ne asimptotska metoda algebarske identifikacije parametara koja se zasniva na metodi frekvencijskog pomaka. Spomenute metode korištene su za estimaciju konstante opruge. Provedena je komparativna analiza stabilnosti i robusnosti na šum mjerenja spomenutih metoda. U drugom dijelu rada dani su osnovni koncepti rada kvadrokoptera te je izvedena njegova kinematika i dinamika. Metoda frekvencijskog pomaka iskorištena je za identifikaciju parametara mase i momenata tromosti kvadrotora te su identificirani parametri korišteni za sintezu adaptivnog regulatora na više modela kvadrotora uz dodan šum mjerenja.

Ključne riječi: Identifikacija parametara, Linearni dinamički sustavi, Autonomne letjelice, Adaptivno upravljanje

Summary

In this thesis algebraic method for real time parameter identification was considered. Algebraic method enables almost instantaneous estimation of real system parameters and therefore it was applied to the problem of parameter identification of autonomous aircraft in real time. In the first part of thesis asymptotic methods of algebraic identification were implemented, then came conventional non-asymptotic method based on algebraic derivations and non-asymptotic, frequency-shift based method of algebraic parameter identification. Mentioned methods were used to estimate the constant of the spring. Comparative analysis was conducted to determine the stability and robustness to measuring noise of aforementioned methods. In the second part of thesis basic concepts of quadcopter were given and kinematics and dynamics were derived. Frequency-shift based method was used to identify mass and inertia moments of quadcopter and these identified parameters were used to construct adaptive controller on multiple quadcopter models with added measurement noise.

Keywords: Parameter identification, Linear dynamical systems, Autonomous aircrafts, Adaptive control

1 | Uvod

1.1. Algebarska estimacija parametara

Model prema [1] je matematička reprezentacija postojećeg sustava. Ako se taj model može opisati pomoću konačnog broja varijabli i parametara nazivamo ga parametarski model. Neki primjeri takvih parametarskih modela su prijenosne funkcije električnih krugova, jednačbe gibanja mehaničkog ovjesa itd. Modeli korišteni u modernoj teoriji upravljanja su, s nekim iznimkama, parametarski modeli s linearnim i nelinearnim jednačbama stanja. Da bi implementirali kontroler koji se bazira na modelu potrebno je poznavati preciznu strukturu modela sustava i njemu pripadajuće parametre. Stoga, ako su parametri nepoznati proces identifikacije parametara je iznimno važan za konstruiranje upravljačkog sustava.

Problem estimacije parametara dinamičkog modela datira još iz 3. stoljeća pr. Kr. gdje je gibanje nebeskih tijela opisano sa šest parametara [2].

Estimacija koja se zasniva na minimizaciji funkcije pogreške pripisuje se Galileu [3], a jedan od najvažnijih ranih doprinosa području smatra se statički pogled na problem identifikacije parametara koje je predložio Gauss [4].

Sredinom prošloga stoljeća pa na dalje pojavljuje se niz metoda za estimaciju. Preko Zadeha koji je utvrdio izraz "identifikacija" pa preko Kalmana [5], Ljunga [6] i drugih dolazimo do klasičnih metoda za identifikaciju i estimaciju. Novi pristup u identifikaciji parametara zasnovan na metodi algebarskog deriviranja predložen je nedavno u [7] i [1] za brzu i pouzdanu estimaciju parametara u sustavima s povratnom vezom. Ova metoda korištena je za identifikaciju parametara [8], stanja [9], derivacija signala [10],

polinomnih poremećaja, te detektirati greške [11].

Algebarska metoda omogućuje identifikaciju parametara i stanja te robusnost s obzirom na aditivne perturbacije poput šuma mjerenja. Tehnika je primjenjiva na linearne i nelinearne sustave. Kod linearnih sustava postoje dva pristupa, u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Algebarska metoda omogućava konstruiranje robusnih on-line identifikatora parametara i varijabli stanja uz prisutnost šuma. Pri tome nije potrebno statističko poznavanje šuma. Osnovno invarijantno filtriranje koje se uobičajeno koristi kod ove metode zasniva se na svojstvu prigušenja šuma kod integriranja. Također, tradicionalni nisko propusni filteri i nelinearni filteri su prikladni za korištenje s ovom metodom. Valja napomenuti da uz skoro trenutnu identifikaciju parametara i sve navedene prednosti postoje neke mane. Primjena algebarskog deriviranja za eliminaciju početnih uvjeta s kombinacijom invarijantnog filtriranja u formi lančanih integratora dovodi do nestabilne vremenski promjenjive realizacije identifikatorskih filtera u prostoru stanja. Kako su varijable identifikatora neograničene potreban je dodatan mehanizam za isključivanje nakon kratkog vremena. Da bi se riješio taj problem u [12] je predloženo korištenje konačnih diferencija i operatora pomaka. Korištenjem ovih operatora u kombinaciji s asimptotski stabilnim invarijantnim filterima dobiva se stabilna realizacija identifikatorskih filtera u prostoru stanja.

1.2. Objekt upravljanja

Zadnjih godina drastično se povećao interes za robotiku. Štoviše, mnoge industrije zahtijevaju robote kako bi zamijenili ljude u opasnim i monotonim okruženjima. Tu do izražaja dolaze mala letuća vozila koja otvaraju široku paletu novih mogućnosti primjene.

Kvadrakopter je multirotorska letjelica pogonjena s četiri rotora. Posjeduje dobru manevarabilnost, mehaničku jednostavnost i veliku nosivost. Najveća mana je velika potrošnja energije zbog četiri motora. Struktura kvadrakoptera može biti izuzetno pogodna za nadzor, snimanje, za rad u opasnom okruženju, unutarnja navigacija i mapiranje.

1.3. Organizacija po poglavljima

Osnovni cilj ovog rada je implementacija algebarskih metoda za identifikaciju parametara autonomne letjelice s ciljem adaptivnog upravljanja letjelicom tijekom prenošenja tereta nepoznatih masa i momenata inercije. Rad je strukturiran kroz poglavlja na sljedeći način.

U poglavlju 2 implementiranu su algebarske metode identifikacije parametara na sustavu mehaničkog oscilatora. Identificira se konstanta opruge, a zatim je provedena komparativna analiza stabilnosti i robusnosti na šum mjerenja metoda algebarske identifikacije.

U poglavlju 3 dane su osnovne definicije, konfiguracije rotokoptera te osnovni koncepti kvadkoptera. Izvedena je kinematika i dinamika kvadkoptera te napravljena sinteza upravljanja.

U poglavlju 4 izvedene su jednadžbe koje su nam potrebne za identifikaciju mase i momenata tromosti kvadkoptera.

U poglavlju 5 provedene su simulacije i dani rezultati identifikacije mase i momenata tromosti kvadkoptera te također simulacijski rezultati regulacije adaptivnim regulatorom.

2 Algebarske metode identifikacije parametara

U ovom poglavlju bit će prikazan postupak identifikacije konstante opruge na primjeru mehaničkog oscilatora

$$\ddot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad (2.1)$$

pomoću asimptotskih i neasimptotskih metoda algebarske identifikacije parametara.

2.1. Asimptotska metoda algebarske identifikacije

Estimaciju parametara preko ove kao i drugih metoda koje će uslijediti započet ćemo primjenom Laplace-ove transformacije na 2.1 i pritom dobivamo

$$s^2y(s) + ky(s) = c_1s + c_0 \quad (2.2)$$

gdje je $c_1 = y_0$ i $c_0 = v_0$

2.1.1. Invarijantno filtriranje s različitim polovima

Jednadžbu 2.2 pomožit ćemo filterom

$$\frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} \quad (2.3)$$

gdje su a_1, a_2, a_3 pozitivni parametri pri čemu se dobivaju negativni polovi i stabilnost sustava. Nakon množenja dobivamo

$$G_2(s)y(s) + kG_0y(s) = H(s) \quad (2.4)$$

gdje su

$$G_2(s) = \frac{s^2}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)} = \frac{A_{21}}{s+a_1} + \frac{A_{22}}{s+a_2} + \frac{A_{23}}{s+a_3}, \quad (2.5)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)} = \frac{A_{01}}{s+a_1} + \frac{A_{02}}{s+a_2} + \frac{A_{03}}{s+a_3}, \quad (2.6)$$

$$H(s) = \frac{c_1s + c_0}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)} = \frac{B_1}{s+a_1} + \frac{B_2}{s+a_2} + \frac{B_3}{s+a_3}. \quad (2.7)$$

Zbog dodatnog pojednostavljenja izraz 2.4 možemo zapisati kao

$$y_2(s) + ky_0(s) = H(s) \quad (2.8)$$

u kojemu je

$$y_2(s) = G_2(s)y(s) = A_{21}\frac{y(s)}{s+a_1} + A_{22}\frac{y(s)}{s+a_2} + A_{23}\frac{y(s)}{s+a_3}, \quad (2.9)$$

$$y_0(s) = G_0(s)y(s) = A_{01}\frac{y(s)}{s+a_1} + A_{02}\frac{y(s)}{s+a_2} + A_{03}\frac{y(s)}{s+a_3}. \quad (2.10)$$

Prethodni sustav jednažbi potrebno je zapisati u prostoru stanja. To možemo postići uvođenjem kanonski varijabli stanja tako da je

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \frac{y(s)}{s+a_1}, \\ x_2(s) &= \frac{y(s)}{s+a_2}, \\ x_3(s) &= \frac{y(s)}{s+a_3}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Množenjem jednažbi 2.11 s nazivnikom dobivamo

$$\begin{aligned} sx_1(s) + a_1x(s) &= y(s), \\ sx_2(s) + a_2x(s) &= y(s), \\ sx_3(s) + a_3x(s) &= y(s), \end{aligned} \quad (2.12)$$

i primjenom obrnute Laplace-ove transformacije dobivamo set diferencijalnih jednažbi u vremenskom području

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_1x_1(t) + y(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2x_2(t) + y(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -a_3x_3(t) + y(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

i izlazne jednadžbe

$$\begin{aligned} y_2(t) &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3, \\ y_0(t) &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Prethodne jednadžbe u matricnom zapisu nalaze se ispod.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Naposljetku nam ostaje član $H(s)$ dobiven množenjem početnih uvjeta Laplace-ove transformacije s invarijantnim filterom. Ako sada na taj član prikazan u jednadžbi 2.7 primijenimo obrnutu Laplace-ovu transformaciju dobivamo

$$h(t) = B_1 e^{-a_1 t} + B_{12} e^{-a_2 t} + B_3 e^{-a_3 t}. \quad (2.17)$$

Iz prethodne jednadžbe da se zaključiti da $h(t)$ teži u 0 kada t teži u beskonačnost, a brzinu određuje pozicija polova. Drugim riječima, što su polovi pomaknuti više u negativno $h(t)$ će brže ići u 0.

Sada kad imamo sve članove opet u vremenskom području 2.8 možemo zapisati kao

$$y_2(t) + ky_0(t) = h(t), \quad (2.18)$$

i iz te jednadžbe možemo dobiti konstantu opruge

$$k = -\frac{y_2(t)}{y_0(t)} + \frac{h(t)}{y_0(t)}. \quad (2.19)$$

Drugi član na desnoj strani jednadžbe postaje zanemariv nakon tranzijentnog vremena zbog toga što $h(t)$ teži u 0 te nam ostaje

$$k = -\frac{y_2(t)}{y_0(t)}. \quad (2.20)$$

Iz prethodne jednadžbe vidimo da postoji opasnost dijeljenja s 0. Do tog dijeljenja će sigurno doći u trenutku $t = 0$, a možda i u nekom kasnijem trenutku. Zato je u [13] predložena metoda da se na brojnik i nazivnik u izrazu 2.20 primjeni apsolutna vrijednost i potom integriraju, odnosno

$$k = \frac{\int_0^t |y_2(t)| dt}{\int_0^t |y_0(t)| dt}, \quad \text{za } t \geq \varepsilon > 0. \quad (2.21)$$

Brojnik i nazivnik možemo sada proglasiti varijablama stanja i derivirati ih i uz 2.20 dobiti još

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= |y_2(t)| \\ \dot{x}_5 &= |y_0(t)| \end{aligned} \quad (2.22)$$

Na kraju dolazimo do konačnog algoritma koji će se implementirati u Matlabu. Imamo izlazne jednadžbe 2.9 i 2.10, zatim jednadžbe 2.13 i 2.22 koje će biti rješavane numeričkim metodama integracije(ODE45) i još ćemo zapisati da je

$$k = k_0, \quad \text{za } 0 < t < \varepsilon \quad \text{i} \quad k = \frac{x_4(t)}{x_5(t)}, \quad \text{za } t \geq \varepsilon \quad (2.23)$$

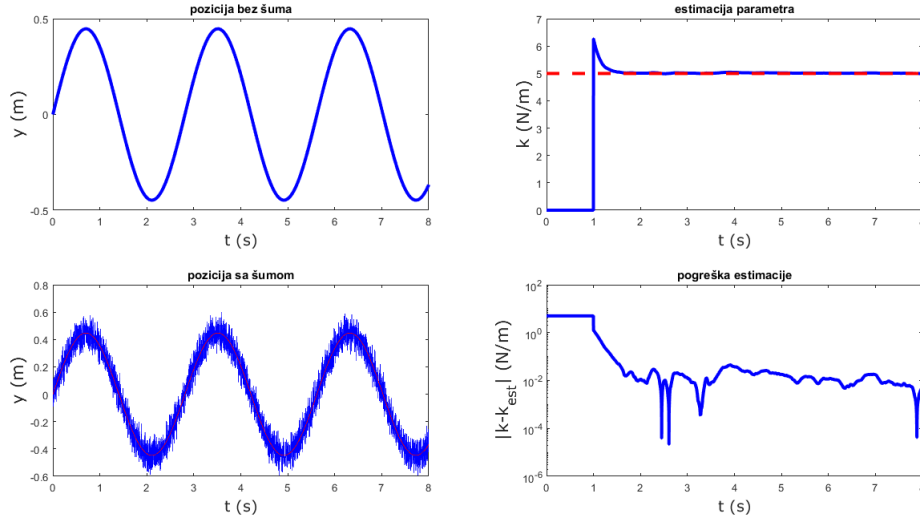
gdje je k_0 proizvoljna(procjena) vrijednost parametra. U simulacijama se uzima da je $k_0 = 0$ i valja napomenuti da se uzima pretpostavka da je predznak parametra poznat. Jedino što je još ostalo za odrediti su koeficijenti u jednadžbama 2.9 i 2.10, a njih određujemo kao

$$\begin{aligned} A_{21} &= \lim_{s \rightarrow a_1} (s + a_1) G_2(s) = \lim_{s \rightarrow a_1} (s + a_1) \frac{s^2}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \\ &= \frac{a_1^2}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$A_{22} = \lim_{s \rightarrow a_2} (s + a_2) G_2(s) = \frac{a_2^2}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \quad (2.25)$$

$$A_{23} = \lim_{s \rightarrow a_3} (s + a_3) G_2(s) = \frac{a_3^2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \quad (2.26)$$

$$A_{01} = \lim_{s \rightarrow a_1} (s + a_1) G_0(s) = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \quad (2.27)$$



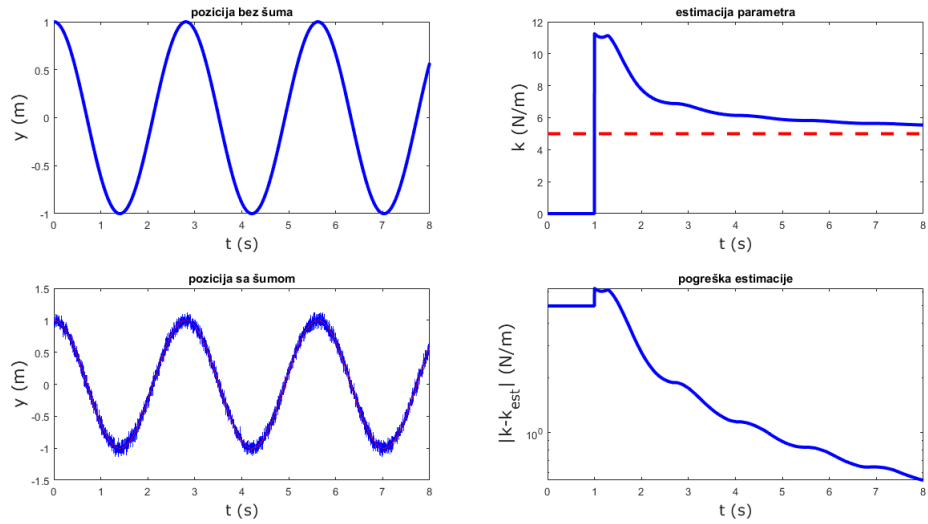
Slika 2.1: Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 1$ i početnu poziciju $y_0 = 0$.

$$A_{02} = \lim_{x \rightarrow a_2} (s + a_2)G_0(s) = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \quad (2.28)$$

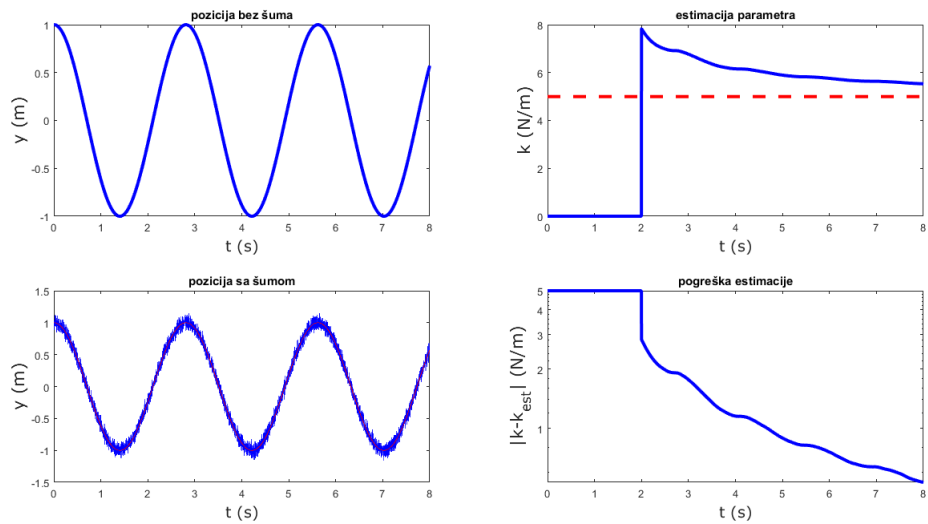
$$A_{03} = \lim_{x \rightarrow a_3} (s + a_3)G_0(s) = \frac{1}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}. \quad (2.29)$$

Nakon implementacije dobivenih jednažbi u Matlabu dobivamo simulacijske rezultate. Polovi filtera smješteni su u -4, -5 i -6.

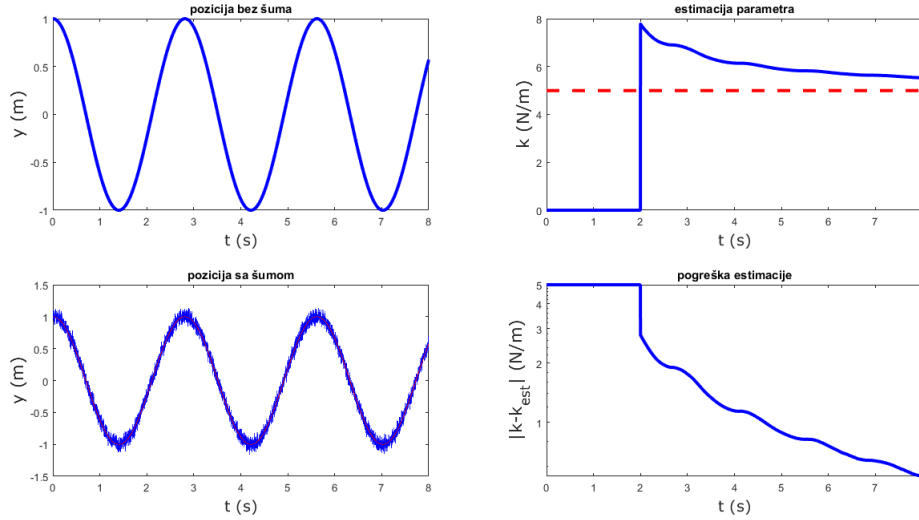
Iz slike 2.5 se da primijetiti da se vrijednost konstante u trenutku uključivanja identifikira s određenim prebačajem te potom asimptotski hvata pravu vrijednost. Iz tog razloga ova metoda se zove asimptotska. Na slici 2.6 vidimo da već pri samoj promjeni početnih uvjeta identifikacija znatno pogoršava. Točnost identifikacije možemo popraviti kasnijim uključivanjem identifikatora što se može primijetiti na slici 2.3, a promjena amplitude šuma nema veliki utjecaj na konačni rezultat. To se može vidjeti na slici 2.4 u kojoj je amplituda šuma uvećana tri puta u odnosu na dosadašnje simulacije. Svi ti prebačaji koji se pojavljuju posljedica su neponištenih početnih uvjeta.



Slika 2.2: Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$.



Slika 2.3: Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$, $\epsilon = 2$.



Slika 2.4: Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s različitim polovima za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$, $\epsilon = 2$ i tri puta uvećanom amplitudom šuma.

2.1.2. Invarijantno filtriranje s višestrukim polom

Kao i u prošlom poglavlju izraz 2.1 pomnožit ćemo s invarijantnim filterom

$$\frac{1}{(s+a)^3} \quad (2.30)$$

koji sada ima 3 jednaka pola. Zatim kao i u prošlom slučaju dobivamo izraz 2.4 čiji su članovi sada

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{s^2}{(s+a)^3} = \frac{1}{(s+a)} \frac{s^2}{(s+a)^2} = \frac{1}{(s+a)} \left(\frac{s}{s+a} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{s+a} \left(1 - \frac{a}{s+a} \right) = \frac{1}{s+a} \left(1 - 2\frac{a}{s+a} + \left(\frac{a}{s+a} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{a} \frac{a}{s+a} \left(1 - 2\frac{a}{s+a} + \left(\frac{a}{s+a} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{a}{s+a} - 2\left(\frac{a}{s+a} \right)^2 + \left(\frac{a}{s+a} \right)^3 \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+a)^3} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{a}{s+a} \right)^3, \quad (2.32)$$

$$H(s) = \frac{c_1 s + c_0}{(s+a)^3}. \quad (2.33)$$

Ako uzmemo kao i u prošlom slučaju pojednostavljenje u obliku izraza 2.8 dobivamo da su

$$y_2(s) = G_2(s)y(s) = \frac{1}{a} \left(\frac{a}{s+a} - 2 \left(\frac{a}{s+a} \right)^2 + \left(\frac{a}{s+a} \right)^3 \right) y(s), \quad (2.34)$$

$$y_0(s) = G_0(s)y(s) = \frac{1}{a^3} \left(\frac{a}{s+a} \right)^3. \quad (2.35)$$

Prethodne izraze potrebno je raspisati da bi mogli lakše odrediti kanonske varijable stanja kao

$$y_2(s) = \frac{1}{a} \frac{a}{s+a} y(s) - 2 \frac{1}{a} \frac{a}{s+a} \frac{a}{s+a} y(s) + \frac{1}{a} \frac{a}{s+a} \frac{a}{s+a} \frac{a}{s+a} y(s), \quad (2.36)$$

$$y_0(s) = \frac{1}{a^3} \frac{a}{s+a} \frac{a}{s+a} \frac{a}{s+a} y(s). \quad (2.37)$$

Ako sada uzmemo da je

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \frac{a}{s+a} y(s), \\ x_2(s) &= \frac{a}{s+a} x_1(s), \\ x_3(s) &= \frac{a}{s+a} x_2(s), \end{aligned} \quad (2.38)$$

izlazne jednadžbe sustava postaju

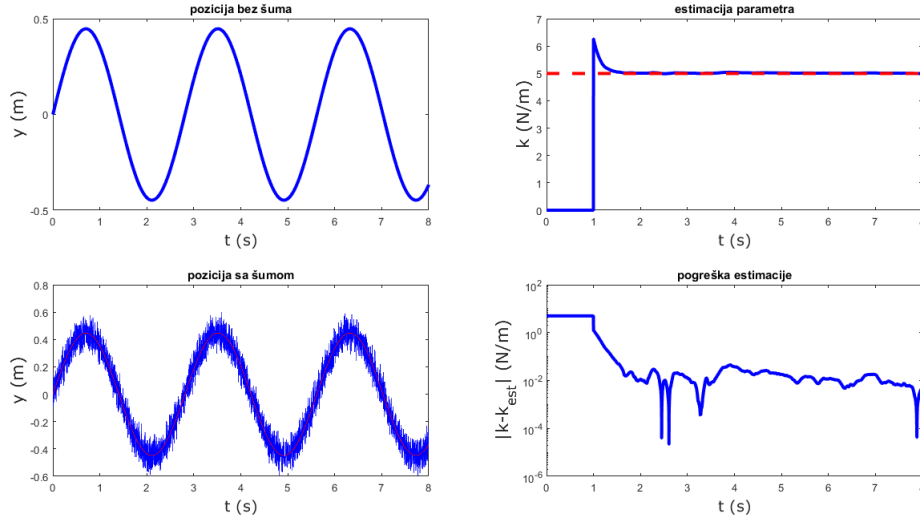
$$y_2(s) = \frac{1}{a} (x_1(s) - 2x_2(s) + x_3(s)), \quad (2.39)$$

$$y_0(s) = \frac{1}{a^3} x_3(s). \quad (2.40)$$

Kao i u prethodnom primjeru gornje jednadžbe potrebno je vratiti u vremensko područje obrnutom Laplace-ovom transformacijom. Time iz jednadžbe 2.38 dobivamo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + ay(t), \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + ax_1, \\ \dot{x}_3 &= -ax_3 + ax_2, \end{aligned} \quad (2.41)$$

a iz jednadžbi 2.39 i 2.40 dobivamo



Slika 2.5: Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s višestrukim polovom za početnu brzinu $v_0 = 1$ i početnu poziciju $y_0 = 0$.

$$y_2(t) = \frac{1}{a}(x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t)), \quad (2.42)$$

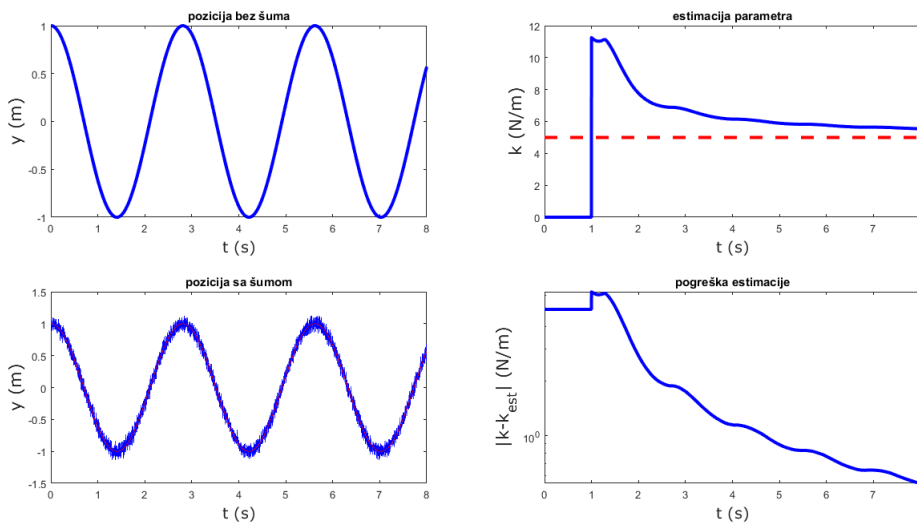
$$y_0(t) = \frac{1}{a^3}x_3(t). \quad (2.43)$$

Radi preglednosti jednadžbe 2.41, 2.42 i 2.43, možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t), \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a^3} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Sada kada imamo sve potrebno možemo odrediti konstantu opruge na isti način kao u izrazu 2.19 i primijeniti nelinearno invarijantno filtriranje što znači da će svi izrazi od 2.19 do 2.23 biti identični. Rezultati simulacije dobivenih izraza prikazani su na slikama 2.5 i 2.6. Višestruki pol smješten u -5, što je srednja vrijednost polova iz prošlog primjera.



Slika 2.6: Asimptotska identifikacija parametara pri filtriranju s višestrukim polovom za početnu brzinu $v_0 = 0$ i početnu poziciju $y_0 = 1$.

2.2. Neasimptotske metode algebarske identifikacije

2.2.1. Metoda algebarskog deriviranja

Zbog problema kojim smo se susreli u prethodnim poglavljima kao što su veliki preskok u estimaciji koji je posljedica početnih uvjeta u ovom poglavlju naglasak će biti na poništavanju istih. Proces će biti sličan kao u [14] samo za drugi primjer. Kao i do sada polazišna točna je izraz 2.2 na koji primjenjujemo operator deriviranja dok ne uklonimo početne uvjete iz jednadžbe. Deriviranjem izraza 2.2 po varijabli s dobivamo izraz

$$2sy(s) + s^2 \frac{dy(s)}{ds} + k \frac{dy(s)}{ds} = c_1 \quad (2.46)$$

u kojem nam ostaje još član c_1 što znači da je potrebno derivirati još jednom. Time dobivamo izraz

$$s^2 \frac{d^2y(s)}{ds^2} + 4s \frac{dy(s)}{ds} + 2y(s) + k \frac{d^2y(s)}{ds^2} = 0 \quad (2.47)$$

koji u sebi ne sadrži početne uvjete ali sadrži derivacije reprezentirane faktorom s i njegovim pozitivnim eksponentom. Zbog nepovoljnih svojstava derivacija uklonit ćemo

ih množenjem gornjeg izraza sa s^{-2} i dobiti

$$\frac{d^2y(s)}{ds^2} + 4s^{-1}\frac{dy(s)}{ds} + 2s^{-2}y(s) + ks^{-2}\frac{d^2y(s)}{ds^2} = 0. \quad (2.48)$$

Novonastali izraz, kao što se može primijetiti, sadrži samo s s negativnim eksponentima i iz tog izraza možemo odrediti konstantu opruge kao

$$k = -\frac{b(s)}{n(s)}, \quad (2.49)$$

gdje je

$$b(s) = \frac{d^2y(s)}{ds^2} + 4s^{-1}\frac{dy(s)}{ds} + 2s^{-2}y(s) \quad (2.50)$$

i

$$n(s) = s^{-2}\frac{d^2y(s)}{ds^2}. \quad (2.51)$$

Sada, da bi mogli provesti simulaciju, brojnik i nazivnik trebamo zapisati u obliku prostora stanja. Krenut ćemo od brojnika kojeg ćemo zapisati kao

$$b(s) = \frac{d^2y(s)}{ds^2} + 4\frac{1}{s}\frac{dy(s)}{ds} + 2\frac{1}{s}\frac{1}{s}y(s) \quad (2.52)$$

iz ovakvog zapisa jasno je vidljivo da je iz druga dva člana moguće izlučiti $\frac{1}{s}$ i nakon toga proglasiti da je

$$x_1(s) = 2\frac{1}{s}y(s). \quad (2.53)$$

Time brojnik ponovo možemo zapisat kao

$$b(s) = \frac{d^2y(s)}{ds^2} + \frac{1}{s}\left[4\frac{dy(s)}{ds} + x_1(s)\right] \quad (2.54)$$

i iz toga uzeti da će druga varijabla stanja biti

$$x_2(s) = \frac{1}{s}\left[4\frac{dy(s)}{ds} + x_1(s)\right] \quad (2.55)$$

Na kraju brojnik kao izlazna varijabla postaje

$$b(s) = \frac{d^2y(s)}{ds^2} + x_2(s). \quad (2.56)$$

U vremensko područje $x_1(s)$ i x_2 prebacit ćemo tako da ih prvo pomnožimo sa s i onda primijenimo obrnutu Laplace-ovu transformaciju. Za $x_1(s)$ to znači

$$sx_1(s) = 2y(s) \quad (2.57)$$

i naposljetku

$$\dot{x}_1(t) = 2y(t). \quad (2.58)$$

Kod druge varijable treba poznavati obrnutu Laplace-ovu transformaciju za $\frac{dy(s)}{ds}$. U [14] možemo pronaći opći izraz za to koji glasi

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad (2.59)$$

gdje je

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (2.60)$$

Tim postupkom dobivamo prvo

$$sx_2(s) = \left[4 \frac{dy(s)}{ds} + x_1(s) \right], \quad (2.61)$$

te zatim

$$\dot{x}_2(t) = -4ty(t) + 2x_1(t). \quad (2.62)$$

Za dobivanje izlazne jednadžbe u vremenskom području poslužiti ćemo se istim postupkom i time dobivamo da je

$$b(t) = t^2 y(t) + x_2(t). \quad (2.63)$$

Nakon zapisanog brojnika u vremenskom području isto treba učiniti i za nazivnik. Radi jednostavnosti zapisat ćemo ga kao

$$n(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s} \frac{d^2 y(s)}{ds^2}. \quad (2.64)$$

Iz toga direktno određujemo da je

$$x_3 = \frac{1}{s} \frac{d^2 y(s)}{ds^2} \quad (2.65)$$

te zatim da je

$$x_4 = \frac{1}{s} x_3. \quad (2.66)$$

Kao i prije to prebacimo u vremensko područje i dobivamo

$$\dot{x}_3(t) = t^2 y(t), \quad (2.67)$$

$$\dot{x}_4(t) = x_3, \quad (2.68)$$

i izlaznu varijablu

$$n(t) = x_4(t). \quad (2.69)$$

Izlazne varijable dodatno su filtrirane pomoću nisko propusnog filtera drugog reda

$$\begin{aligned} \ddot{b}_f &= -2\zeta\omega_n\dot{b}_f - \omega_n^2(b_f - b(t)), \\ \ddot{n}_f &= -2\zeta\omega_n\dot{n}_f - \omega_n^2(n_f - n(t)). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Spomenuti filter u prostor stanja ćemo prebaciti tako da postavimo da je

$$\begin{aligned} x_1 &= b_f, \\ \dot{x}_1 &= \dot{b}_f = x_2, \\ \dot{x}_2 &= \ddot{b}_f = -2\zeta\omega_n\dot{b}_f - \omega_n^2(b_f - b(t)). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Kao i do sada na izraz 2.49 primijeniti ćemo nelinearno invarijantno filtriranje i zamijeniti $b(t)$ i $n(t)$ s $b(f)$ i $n(f)$ te dobiti

$$k = \frac{\int_0^t |b(f)|}{\int_0^t |n(f)|}, \quad \text{za } t \geq \varepsilon > 0. \quad (2.72)$$

Brojnik i nazivnik prethodnog izraza deriviramo i proglašavamo novim varijablama stanja. Sustav koji smo dobili ukupno je 10. reda. Zapisani u matričnom obliku izrazi 2.58, 2.62, 2.67 i 2.68 postaju

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix} y(t). \quad (2.73)$$

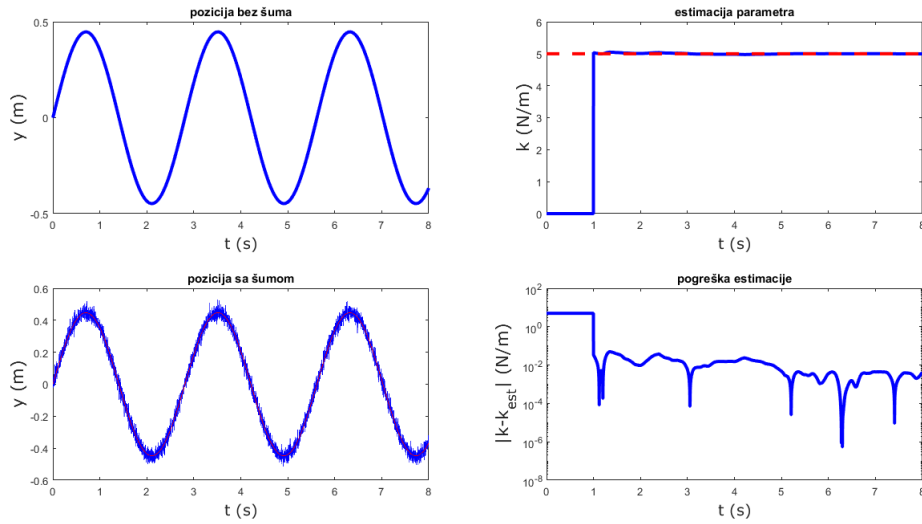
Simulacijski rezultati kao što se može vidjeti iz slika 2.7 i 2.8 znatno su bolji od prethodnih.

Glavni problem ovoga pristupa je u tome što je dobiveni sustav nestabilan. To se može primjetiti u izrazu 2.73 gdje imamo članove $-4t$ i t^2 .

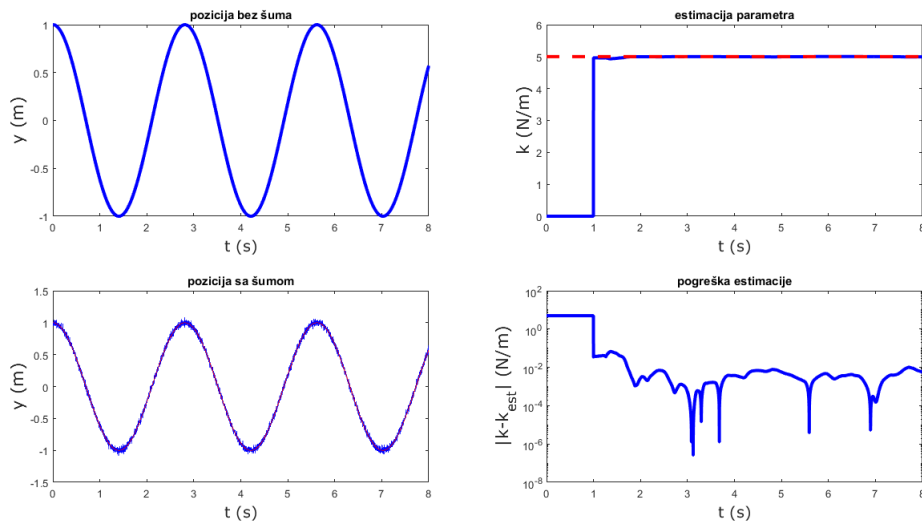
2.2.2. Metoda frekvencijskog pomaka

Izraz 2.2 možemo zapisati kao

$$N(s)y(s) = R(s), \quad (2.74)$$



Slika 2.7: Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode algebarskog deriviranja pri početnoj brzini $v_0 = 1$, a početnoj poziciji $y_0 = 0$.



Slika 2.8: Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode algebarskog deriviranja pri početnoj brzini $v_0 = 0$, a početnoj poziciji $y_0 = 1$.

gdje je

$$N(s) = s^2 + k, \quad R(s) = c_1 s + c_0. \quad (2.75)$$

Da bi mogli nastaviti dalje s poništavanjem početnih uvjeta prvo ćemo se upoznati sa svojstvima diferencijskog operatora u Laplace-ovoj domeni. Primjenom diferencijskog operatora na funkciju $f(s)$ dobivamo

$$\delta_q f(s) = f(s + q) - f(s), \quad (2.76)$$

tako da se operator δ_q može prikazati kao

$$\delta_q = e^{q \frac{d}{ds}} - 1 \quad (2.77)$$

gdje je $e^{q \frac{d}{ds}}$ operator pomaka sa svojstvom $e^{q \frac{d}{ds}} f(s) = f(s + q)$. Nadalje, povećanjem stupnja operatora dobivamo

$$\delta_q^2 = \left(e^{q \frac{d}{ds}} - 1 \right)^2 = e^{2q \frac{d}{ds}} - 2e^{q \frac{d}{ds}} + 1, \quad (2.78)$$

odnosno

$$\delta_q^2 f(s) = f(s + 2q) - 2f(s + q) + f(s). \quad (2.79)$$

Ako je $R(s) = c_1 s + c_0$, onda

$$\begin{aligned} \delta_q R(s) &= R(s + q) - R(s) = c_1(s + q) + c_0 - c_1 s - c_0 \\ &= c_1 q \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \delta_q^2 R(s) &= R(s + 2q) - 2R(s + q) + R(s) = \\ &= c_1(s + 2q) + c_0 - 2c_1(s + q) - 2c_0 + c_1 s + c_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

S obzirom na to da korištenje diferencijskog operatora u Laplace-ovoj domeni rezultira dobivanjem pomaknutih funkcija $F(s + q)$, Laplaceova transformacija

$$F(s + q) = \alpha[e^{-qt} f(t)] \quad (2.82)$$

će se koristiti za transformaciju algebarskih izraza u vremensku domenu. S obzirom na to da primjenom δ_q^2 poništavamo početne uvjete operator ćemo sada primijeniti na cijeli izraz 2.2 i time dobivamo

$$z_2 + k z_0 = 0, \quad (2.83)$$

gdje je

$$z_0 = y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s) \quad (2.84)$$

baš kao u izrazu 2.78 i

$$z_2 = (s + 2q)^2 y(s + 2q) - 2(s + q)^2 y(s + q) + s^2 y(s). \quad (2.85)$$

Sada kada smo dobili izraz 2.83 potrebno je primijeniti invarijantno filtriranje kao kod asimptotskih metoda. Stoga, imat ćemo filtar s tri različita i tri jednaka pola.

2.2.3. Invarijantno filtriranje s različitim polovima

Izraz 2.83 pomnožit ćemo s 2.3 i time dobivamo

$$\hat{z}_2(s) + k\hat{z}_0(s) = 0 \quad (2.86)$$

gdje je

$$\hat{z}_0(s) = G_{00}(s)[y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s)], \quad (2.87)$$

i

$$\hat{z}_2(s) = G_{22}(s)y(s + 2q) - 2G_{21}(s)y(s + q) + G_{20}(s)y(s). \quad (2.88)$$

Iz prethodno izraza dobivamo da je

$$G_{00}(s) = \frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{001}}{s + a_1} + \frac{A_{002}}{s + a_2} + \frac{A_{003}}{s + a_3}, \quad (2.89)$$

$$G_{22}(s) = \frac{(s + 2q)^2}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{221}}{s + a_1} + \frac{A_{222}}{s + a_2} + \frac{A_{223}}{s + a_3}, \quad (2.90)$$

$$G_{21}(s) = \frac{(s + q)^2}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{211}}{s + a_1} + \frac{A_{212}}{s + a_2} + \frac{A_{213}}{s + a_3}, \quad (2.91)$$

$$G_{20}(s) = \frac{s^2}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{201}}{s + a_1} + \frac{A_{202}}{s + a_2} + \frac{A_{203}}{s + a_3}. \quad (2.92)$$

Koeficijente ćemo odrediti kao i prije i dobivamo

$$\begin{aligned} A_{001} &= \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\ A_{002} &= \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\ A_{003} &= \frac{1}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
A_{221} &= \frac{(2q - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\
A_{222} &= \frac{(2q - a_2)^2}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\
A_{223} &= \frac{(2q - a_3)^2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},
\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned}
A_{211} &= \frac{(q - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\
A_{212} &= \frac{(q - a_2)^2}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\
A_{213} &= \frac{(q - a_3)^2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},
\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
A_{201} &= \frac{a_1^2}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\
A_{202} &= \frac{a_2^2}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\
A_{203} &= \frac{a_3^2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Ako dobivene koeficiente vratimo u 2.87 tada ona postaje

$$\begin{aligned}
\hat{z}_2(s) &= \left(\frac{A_{221}}{s + a_1} + \frac{A_{222}}{s + a_2} + \frac{A_{223}}{s + a_3} \right) y(s + 2q) \\
&\quad - 2 \left(\frac{A_{211}}{s + a_1} + \frac{A_{212}}{s + a_2} + \frac{A_{213}}{s + a_3} \right) y(s + q) \\
&\quad + \left(\frac{A_{201}}{s + a_1} + \frac{A_{202}}{s + a_2} + \frac{A_{203}}{s + a_3} \right) y(s),
\end{aligned} \tag{2.97}$$

te sada možemo grupirati članove s istim nazivnikom i time dobivamo

$$\begin{aligned}
\hat{z}_2(s) &= \frac{1}{s + a_1} [A_{221}y(s + 2q) - 2A_{211}y(s + q) + A_{201}y(s)] \\
&\quad + \frac{1}{s + a_2} [A_{222}y(s + 2q) - 2A_{212}y(s + q) + A_{202}y(s)] \\
&\quad + \frac{1}{s + a_3} [A_{223}y(s + 2q) - 2A_{213}y(s + q) + A_{203}y(s)].
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Isto ćemo napraviti s izrazom 2.86 i dobivamo

$$\begin{aligned}
\hat{z}_0(s) &= \frac{1}{s + a_1} A_{001} [y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s)] \\
&\quad + \frac{1}{s + a_2} A_{002} [y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s)] \\
&\quad + \frac{1}{s + a_3} A_{003} [y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s)].
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Dobivene izraze 2.97 i 2.98 prebacit ćemo u prostor stanja da bi mogli izračunati konstantu opruge. Pri vraćanju u vremensko područje poslužit ćemo se već spomenutim izrazom 2.82. Prvo ćemo svaki red iz jednadžbi 2.97 i 2.98 proglašiti novom varijablom stanja i pomnožiti s njenim nazivnikom te tim dobivamo

$$\begin{aligned}
(s + a_1)x_1 &= [A_{221}y(s + 2q) - 2A_{211}y(s + q) + A_{201}y(s)], \\
(s + a_2)x_2 &= [A_{222}y(s + 2q) - 2A_{212}y(s + q) + A_{202}y(s)], \\
(s + a_3)x_3 &= [A_{223}y(s + 2q) - 2A_{213}y(s + q) + A_{203}y(s)], \\
(s + a_1)x_4 &= A_{001}[y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s)], \\
(s + a_2)x_5 &= A_{002}[y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s)], \\
(s + a_3)x_6 &= A_{003}[y(s + 2q) - 2y(s + q) + y(s)].
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Zatim samo primjenom izraz 2.81 i druge već korištene Laplace-ove transformacije i u konačnici dobivamo set diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -a_1x_1 + [A_{221}e^{-2qt} - 2A_{211}e^{-qt} + A_{201}]y(t), \\
\dot{x}_2 &= -a_2x_2 + [A_{222}e^{-2qt} - 2A_{212}e^{-qt} + A_{202}]y(t), \\
\dot{x}_3 &= -a_3x_3 + [A_{223}e^{-2qt} - 2A_{213}e^{-qt} + A_{203}]y(t), \\
\dot{x}_4 &= -a_1x_4 + A_{001}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]y(t), \\
\dot{x}_5 &= -a_1x_5 + A_{002}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]y(t), \\
\dot{x}_6 &= -a_1x_6 + A_{003}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]y(t),
\end{aligned} \tag{2.101}$$

i izlaznih jednadžbi

$$\begin{aligned}
\hat{z}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t), \\
\hat{z}_0(t) &= x_4(t) + x_5(t) + x_6(t).
\end{aligned} \tag{2.102}$$

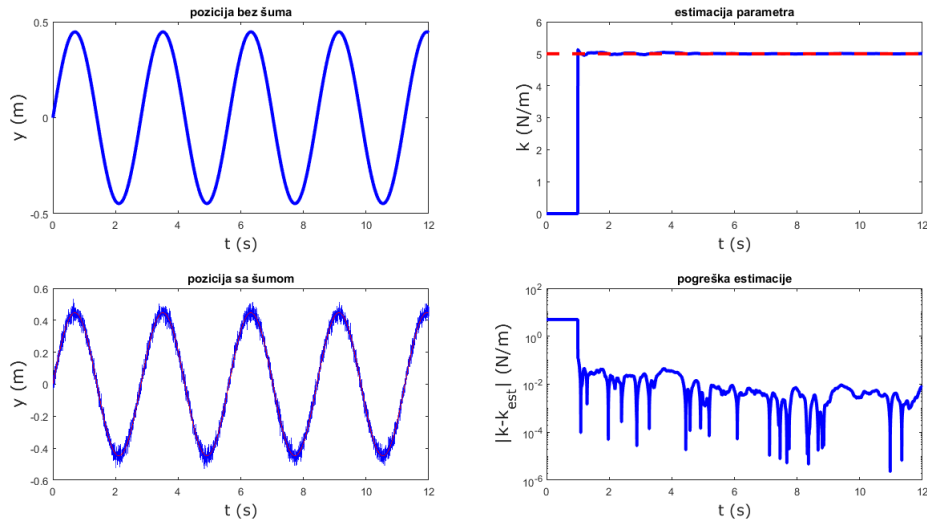
Jednadžba za izračun konstante opruge sada izgleda

$$k = -\frac{\hat{z}_2(t)}{\hat{z}_0(t)} \tag{2.103}$$

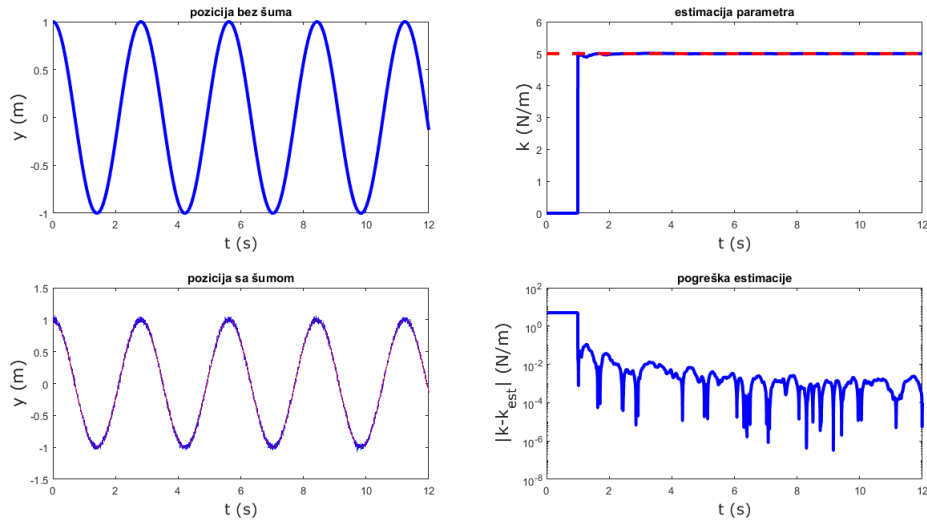
i kao i prije primijenit će se nelinearno invarijantno filtriranje koje ćemo derivirati i dobiti još dvije varijable stanja

$$\begin{aligned}
\dot{x}_7 &= |\hat{z}_2(t)|, \\
\dot{x}_8 &= |\hat{z}_0(t)|.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Rezultati se mogu vidjeti na slikama 2.9 i 2.10.



Slika 2.9: Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s različitim polovima pri počenoj brzini $v_0 = 1$, a početnoj poziciji $y_0 = 0$.



Slika 2.10: Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s različitim polovima pri počenoj brzini $v_0 = 0$, a početnoj poziciji $y_0 = 1$.

2.2.4. Invarijantno filtriranje s višestrukim polom

Po uzoru na prošli slučaj na izraz 2.83 primjenit ćemo filtar 2.30 time dobivamo

$$\hat{z}_2(s) + k\hat{z}_0(s) = 0 \quad (2.105)$$

odnosno,

$$\hat{z}_0(s) = G_{00}(s)[y(s+2q) - 2y(s+q) + y(s)], \quad (2.106)$$

i

$$\hat{z}_2(s) = G_{22}(s)y(s+2q) - 2G_{21}(s)y(s+q) + G_{20}(s)y(s), \quad (2.107)$$

gdje je

$$G_{00}(s) = \frac{1}{(s+a)^3} = \frac{1}{s+a} \frac{1}{s+a} \frac{1}{s+a}, \quad (2.108)$$

$$G_{22}(s) = \frac{(s+2q)^2}{(s+a)^3} = \frac{1}{s+a} \frac{(s+2q)}{s+a} \frac{(s+2q)}{s+a}, \quad (2.109)$$

$$G_{21}(s) = \frac{(s+q)^2}{(s+a)^3} = \frac{1}{s+a} \frac{(s+q)}{s+a} \frac{(s+q)}{s+a}, \quad (2.110)$$

$$G_{20}(s) = \frac{s^2}{(s+a)^3} = \frac{1}{s+a} \frac{s}{s+a} \frac{s}{s+a}. \quad (2.111)$$

Zbog toga što

$$\begin{aligned} \frac{s}{s+a} &= 1 - \frac{a}{s+a} = 1 - aG(s) = 1 + \mu_0 G(s), \\ \frac{s+q}{s+a} &= 1 + \frac{q-a}{s+a} = 1 + (q-a)G(s) = 1 + \mu_1 G(s), \\ \frac{s+2q}{s+a} &= 1 + \frac{2q-a}{s+a} = 1 + (2q-a)G(s) = 1 + \mu_2 G(s), \end{aligned} \quad (2.112)$$

gdje su $\mu_0 = -a$, $\mu_1 = q - a$ i $\mu_2 = 2q - a$, dobivamo

$$G_{20}(s) = \frac{1}{s+a} \left(1 - \frac{a}{s+a}\right) \left(1 - \frac{a}{s+a}\right) = G(s)[1 + \mu_0 G(s)]^2, \quad (2.113)$$

$$G_{21}(s) = \frac{1}{s+a} \left(1 + \frac{q-a}{s+a}\right) \left(1 + \frac{q-a}{s+a}\right) = G(s)[1 + \mu_1 G(s)]^2, \quad (2.114)$$

$$G_{22}(s) = \frac{1}{s+a} \left(1 + \frac{2q-a}{s+a}\right) \left(1 + \frac{2q-a}{s+a}\right) = G(s)[1 + \mu_2 G(s)]^2, \quad (2.115)$$

Konačno,

$$\begin{aligned} G_{00}(s) &= G(s)^3, \\ G_{20}(s) &= G(s) + 2\mu_0 G(s)^2 + \mu_0^2 G(s)^3, \\ G_{21}(s) &= G(s) + 2\mu_1 G(s)^2 + \mu_1^2 G(s)^3, \\ G_{22}(s) &= G(s) + 2\mu_2 G(s)^2 + \mu_2^2 G(s)^3, \end{aligned} \quad (2.116)$$

Vraćanjem gornjih koeficijenata u 2.105 i 2.106 dobivamo

$$\hat{z}_0(s) = G(s)^3[y(s+2q) - 2y(s+q) + y(s)] \quad (2.117)$$

i

$$\begin{aligned} \hat{z}_2(s) &= G(s) + 2\mu_2 G(s)^2 + \mu_2^2 G(s)^3 y(s+2q) - 2G(s) + 2\mu_1 G(s)^2 \\ &\quad + \mu_1^2 G(s)^3 y(s+q) + G(s) + 2\mu_0 G(s)^2 + \mu_0^2 G(s)^3 y(s). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Preuređivanjem gornjih izraza dobivamo

$$\hat{z}_0(s) = G(s)\{G(s)[G(s)y_1(s)]\}, \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \hat{z}_2(s) &= G(s)y_1(s) + G(s)^2 y_2(s) + G(s)^3 y_3(s) \\ &\quad G(s)\{y_1(s) + G(s)[y_2(s) + G(s)y_3(s)]\}, \end{aligned} \quad (2.120)$$

gdje su

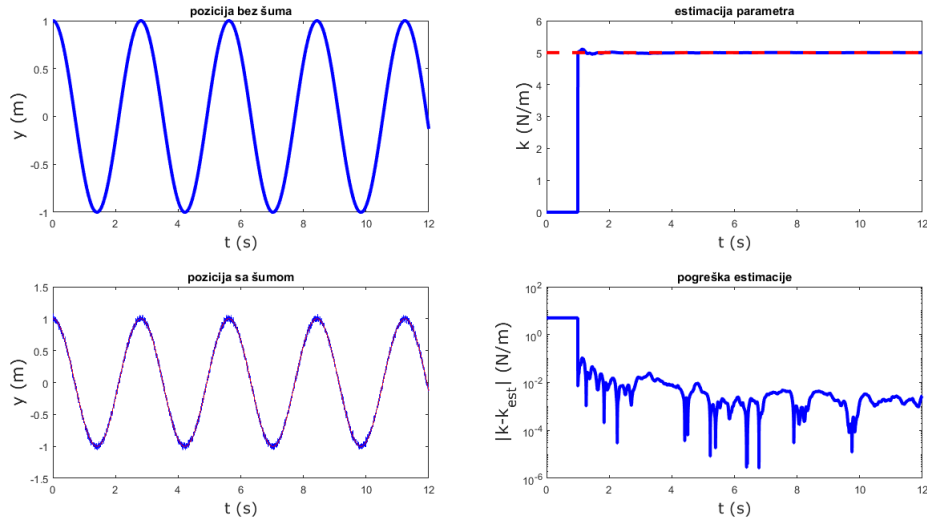
$$\begin{aligned} y_1(s) &= y(s+2q) - 2y(s+q) + y(s), \\ y_2(s) &= 2\mu_2 y(s+2q) - 4\mu_1 y(s+q) + 2\mu_0 y(s), \\ y_3(s) &= \mu_2^2 y(s+2q) - 2\mu_1^2 y(s+q) + \mu_0^2 y(s). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Sada ćemo uvesti varijable stanja kao

$$\begin{aligned} x_6(s) &= G(s)y_1(s), \\ x_5(s) &= G(s)[G(s)y_1(s)] = G(s)x_6(s), \\ x_4(s) &= G(s)\{G(s)[G(s)y_1(s)]\} = G(s)x_5(s), \\ x_3(s) &= G(s)y_3(s), \\ x_2(s) &= G(s)[y_2(s) + G(s)y_3(s)] = G(s)[y_2(s) + x_3(s)], \\ x_1(s) &= G(s)\{y_1(s) + G(s)[y_2(s) + G(s)y_3(s)]\} = G(s)[y_1(s) + x_2(s)] \end{aligned} \quad (2.122)$$

i izlazne jednadžbe postaju

$$\hat{z}_2(s) = x_1(s), \quad \hat{z}_0(s) = x_4(s). \quad (2.123)$$

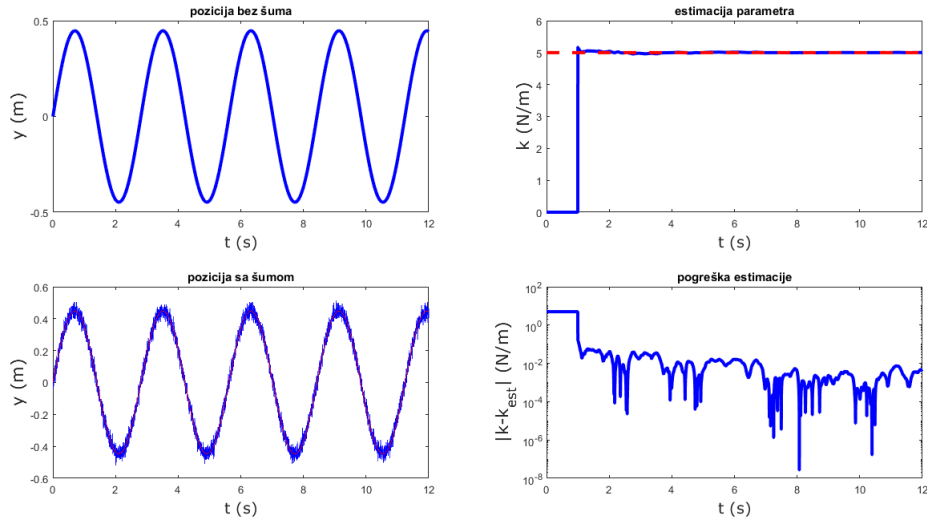


Slika 2.11: Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s višestrukim polom pri početnoj brzini $v_0 = 1$, a početnoj poziciji $y_0 = 0$.

Prebacivanjem izraza 2.122 u vremensku domenu dobivamo

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -ax_1 + x_2 + [e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]y(t), \\
 \dot{x}_2 &= -ax_2 + x_3 + 2[\mu_2 e^{-2qt} - 2\mu_1 e^{-qt} + \mu_0]y(t), \\
 \dot{x}_3 &= -ax_3 + [\mu_2^2 e^{-2qt} - 2\mu_1^2 e^{-qt} + \mu_0^2]y(t), \\
 \dot{x}_4 &= -ax_4 + x_5, \\
 \dot{x}_5 &= -ax_5 + x_6, \\
 \dot{x}_6 &= -ax_6 + [e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]y(t).
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

Sljedeći koraci su jednaki kao u izrazima 2.102 i 2.103. Simulacijski rezultati nalaze na slikama 2.11 i 2.12. Na slici 2.11 može se primjetiti da kod filtriranja različitim ili višestrukim polom u metodi frekvencijskog pomaka nema velike razlike, odnosno performanse su gotovo jednake.



Slika 2.12: Neasimptotska identifikacija parametara primjenom metode frekvencijskog pomaka te filtriranje s višestrukim polom pri početnoj brzini $v_0 = 0$, a početnoj poziciji $y_0 = 1$.

2.3. Usporedba metoda

U ovom poglavlju prikazana je usporedba performansi u ovisnosti o SNR-u (Signal to Noise Ratio)

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt \right) \left(\frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt \right)^{-1} \quad (2.125)$$

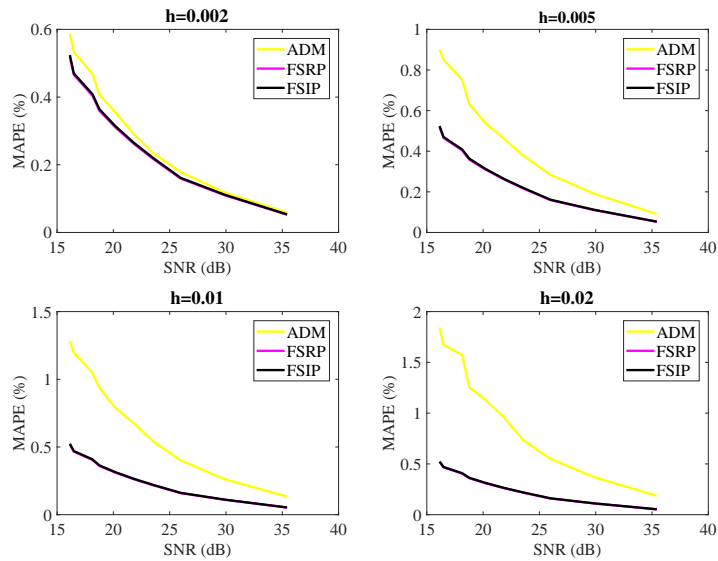
i vremenu uzorkovanja. Greška se mjeri preko srednje apsolutne postotne greške (MAPE- Mean Absolute Percentage Error) [15] u intervalu od $[\varepsilon, T]$ pomoću

$$MAPE = \frac{100}{T - \varepsilon} \int_{\varepsilon}^T ARE(t) dt \quad (2.126)$$

gdje je ARE (Absolut Relative Error) definiran kao

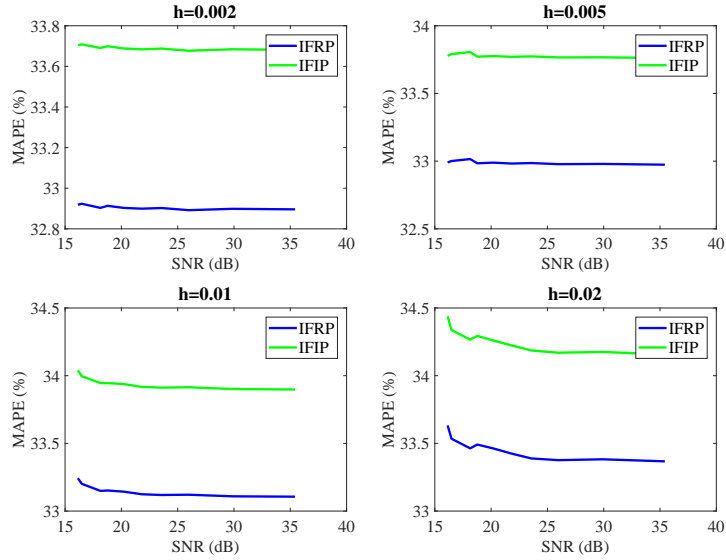
$$ARE(t) = \left| \frac{k(t) - k_{real}}{k_{real}} \right|. \quad (2.127)$$

Da pojednostavimo, u programu ćemo imati tri ugniježdene petlje. Prva petlja će se vrtiti po broju različitih vremena uzorkovanja. U ovom slučaju će to biti četiri. Rezultati će biti bolji što je vrijeme uzorkovanja manje. Druga petlja ići po različitim vrijednostima

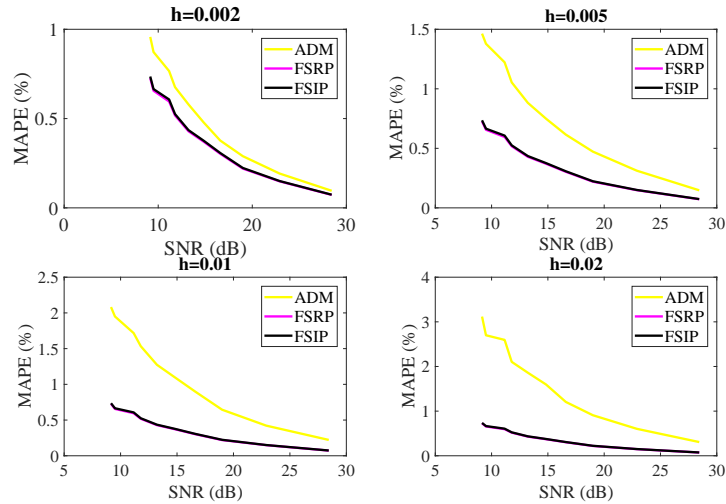


Slika 2.13: Usporedba performansi metode algebarskog deriviranja(ADM), i frequency-shifting pristupa s različitim(FSRP) i višestrukim polovima(FSIP) pri početnoj brzini $v_0 = 0$ i $y_0 = 1$

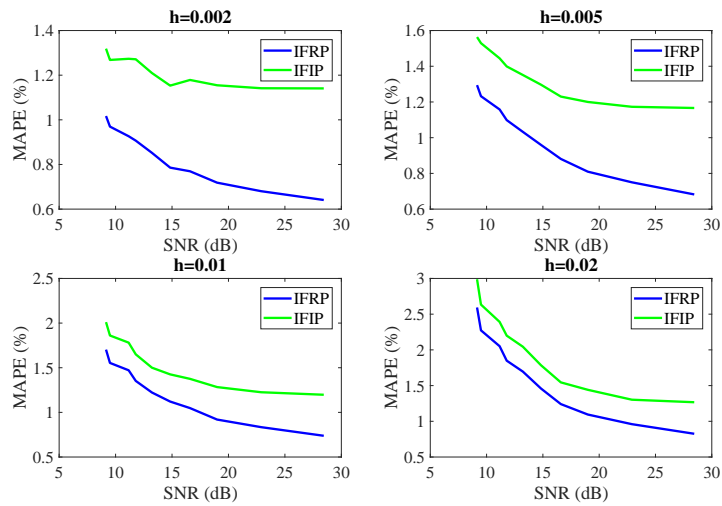
SNR-a, konkretno jedanaest i zadnje petlja će biti po broju Monte Carlo simulacija kojih će biti tristo. Rezultati su prikazani na slikama 2.13, 2.14, 2.15 i 2.16 za različite početne uvjete.



Slika 2.14: Usporedba performansi asimptotske metode pri filtriranju različitim polovima(IFRP) i višestrukim polom(IFIP) pri početnoj brzini $v_0 = 0$ i $y_0 = 1$.



Slika 2.15: Usporedba performansi metode algebarskog deriviranja(ADM), i frequency-shifting pristupa s različitim(FSRP) i višestrukim polovima(FSIP) pri početnoj brzini $v_0 = 1$ i $y_0 = 0$.



Slika 2.16: Usporedba performansi asimptotske metode pri filtriranju različitim polovima (IFRP) i višestrukim polom (IFIP) pri početnoj brzini $v_1 = 0$ i $y_0 = 0$.

3 Dinamički model autonomne letjelice

3.1. Uvod

U ovom poglavlju proći ćemo kroz neke opće definicije, osnovne koncepte te jednadžbe kinematike i dinamike kvadkoptera.

3.2. Definicije

Definicije pojmova preuzete su iz [16].

LETJELICA

Letjelice su bilo kakve naprave sposobne za let, te mogu biti podijeljene u dvije skupine.

- Teže: Gyrocopter, helikopter i njegove varijacije i konvencionalni zrakoplovi s fiksnim krilima.
- Lakše: Baloni i zračni brodovi. Razlika između balona i zračnog broda je u tome što zračni brodovi mogu kontrolirati kretanje u naprijed dok balone nosi vjetar.

Kratika VTOL(eng. Vertical take-off and landing) se primjenjuje za letjelice, koje nisu helikopter, a mogu vertikalno uzletjeti i sletjeti.

HELIKOPTER

Helikopter je letjelica koja može uzletjeti i sletjeti vertikalno. Ove letjelica može lebdjeti, rotirati se u zraku, kretati se bočno i unatrag. Može mijenjati smjer velikom brzinom i prestati se kretati i početi lebdjeti.

Preciznost dijelova zbog industrijske revolucije omogućila je helikopteru da evoluiru u moderne letjelice koje vidamo danas. Vidljivo je da je bilo potrebe za preciznijim dijelovima jer prvi helikopteri nisu imali efikasnost i sposobnost letenja modernih helikoptera.

UAV

Bespilotna letjelica iliti UAV (eng. Unmanned Aerial Vehicle), također zvana *dron*, je zadnja generacija letjelica koje nemaju pilota. UAV-ovi su definirani kao letjelice, bez prisutnosti pilota u letjelici, za izvršavanje misija prikupljanja podataka, nadgledanja i izviđanja. Dronovi imaju nekoliko osnovnih prednosti naspram sustava s ljudima, poput veće manevarske sposobnosti, manje cijene, smanjene mogućnost da budu zapažene radarom, veće izdržljivosti i bez rizika za posadu.

3.3. Konfiguracije rotokoptera

Rotokopteri se mogu podijeliti na sljedeće:

1. Konvencionalna konfiguracija s glavnim rotorom i rotorom na repu
2. Konfiguracija s jednim rotorom
3. Konfiguracija s dvostrukim koaksijalnim rotorima
4. Konfiguracija s dvostrukim rotorom jedan pokraj drugoga
5. Multirotor (primjer: kvadkopter)

3.3.1. Konvencionalna konfiguracija s glavnim rotorom i rotorom na repu

Najuobičajenija konfiguracije je kombinacija glavnog rotora i rotora na repu. Rotor na repu kompenzira okretni moment koji proizvodi glavni rotor. Rotor na repu također

kontrolira helikopter oko vertikalne osi tijekom lebdenja. Iako konvencionalna konfiguracija ima dobru kontrolabilnosti i manevarsku sposobnost njegova mehanička struktura je kompleksna. Odnosno, zahtjeva jedan vrlo veliki rotor i dugi rep.

3.3.2. Konfiguracija s jednim rotorom

Ovaj tip aerodinamičke konfiguracije ima jedan rotor i krilca za kompenzaciju okretnog momenta tog rotora. Kako rotor nema mogućnost naginjanja ima dodatna krilca za proizvodnju okretnih momenata oko x i y osi. Ova konfiguracija je mehanički jednostavnija od helikoptera ali nema veliku mogućnost kontrole. U oba slučaja velika količina energije se troši za poništavanje okretnog momenta rotora. Konfiguracija s jednim rotorom vrlo je pogodna za mikro-letjelice zbog svoje mehaničke jednostavnosti.

3.3.3. Konfiguracija s dvostrukim koaksijalnim rotorima

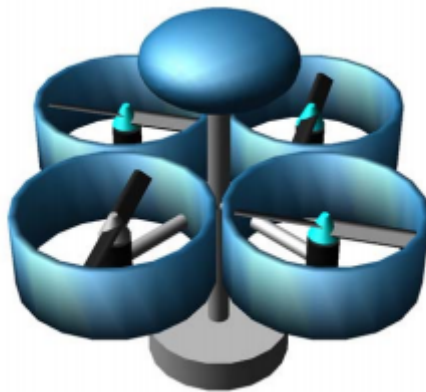
U ovoj konfiguraciji jedan rotor je smješten na iznad drugoga te se oni okreću u suprotnim smjerovima. Zavisno o razlici kutne brzine između dva rotora letjelica će skretati lijevo ili desno. Ova konfiguracija ne može doseći velike brzine. Koaksijalna konfiguracija ima prednost kompaktnosti ali značajan dio energije se gubi zato što rotori interferiraju.

3.3.4. Konfiguracija s dvostrukim rotorom jedan pokraj drugoga

Konfiguracija tandema rotora uobičajeno se koristi kod velikih letjelica. Zbog suprotne rotacije rotora okretni momenti će se poništavati. Dizajn upravljačkog sustava znatno je zamršeniji nego kod uobičajenih helikoptera te stoga ova konfiguracija nikada nije dosegla veću popularnost.

3.3.5. Multirotor

Rotokopter s četiri rotora najpopularniji je multirotor. Ovaj tip rotokoptera održava stabilno lebdenje i precizan let balansirajući sile koje proizvode četiri rotora. Jedna od prednosti kod korištenja multirotora je povećana nosivost. Proizvodi više uzgona te



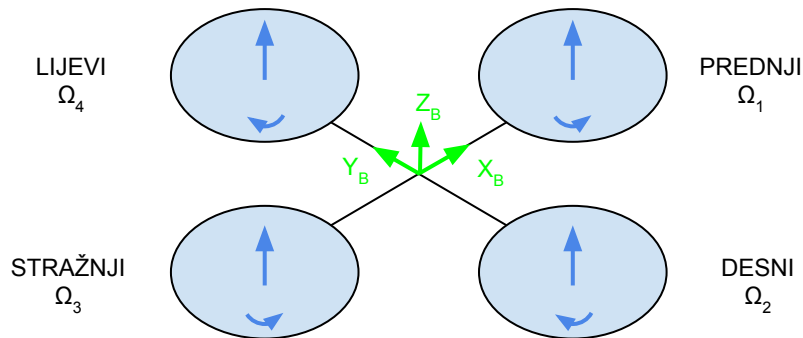
Slika 3.1: Kvadkopter [16]

samim time može više nositi. Kvadkopteri imaju visoke manevarske sposobnosti koje omogućavaju vertikalno uzlijetanje i slijetanje te letenje u teško pristupačna mjesta. Mane ovakve letjelice su povećana masa i konzumacija energije zbog većeg broja rotora. Kod kvadkoptera prikladnije je koristiti električne motore s obzirom da se kontrolira promjenom brzine vrtnje rotora. Prikaz kvadkoptera vidljiv je na slici 3.1.

3.4. Osnovni koncepti kvadkoptera

Četiri rotora kvadkoptera povezana su križnom strukturom. Ta struktura mora biti tanka i lagana ali opet dovoljno kruta kako bi mogla povezati četiri motora. Svaki propeler povezan je s motorom pomoću reduktora, te sve osi propelera moraju biti fiksne i paralelne [17]. Također, imaju lopatice s konstantnim nagibom za usmjeravanje toka zraka prema dolje. S obzirom na rečeno do sada dolazi se do zaključka da jedino na što se može utjecati kod kvadkoptera je brzine vrtnje motora. Kod kvadkoptera prednji i zadnji propeler se okreću u smjeru obrnutom od kazaljke na satu dok se lijevi i desni okreću u smjeru kazaljke na satu. Ova konfiguracija sa suprotnim smjerovima vrtnje eliminira potrebu za rotorom na repu. Na slici 3.2 je prikazan kvadkopter u lebdenju dok svi propeleri imaju jednaku brzinu.

Na slici 3.2 kvadkopter je prikazan crnom bojom, njegov koordinatni sustav zelenom, a rotacijske brzine rotora plavom bojom. U modelu na slici 3.2 svi propeleri imaju jednaku brzinu Ω_H da ponište akceleraciju gravitacije. Iako kvadkopter ima šest stupnjeva



Slika 3.2: Kvadkopter u modu lebdenja

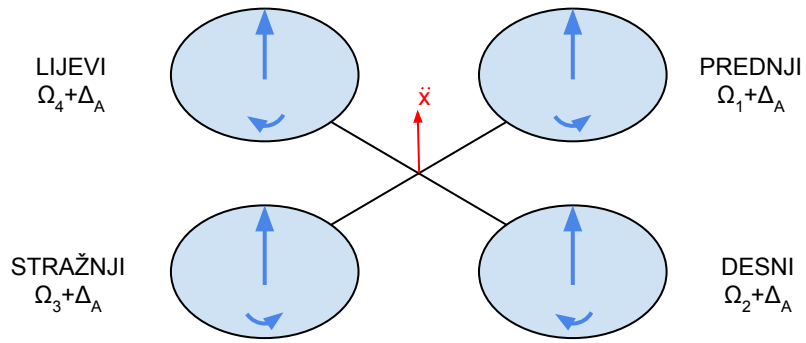
slobode gibanja iliti 6 DOF (eng. Degrees Of Freedom) opremljen je sa samo četiri rotora. Drugim riječima kvadkopter je podaktuiran sustav. No zahvaljujući njegovoj strukturi, lako je odabrati četiri varijable i razdvojiti ih kako bi učinili kontrolu jednostavnijom. Četiri osnovne naredbe omogućuju kvadkopteru da ostvari željenu visinu i poziciju. Te naredbe su:

- Potisak (eng. Throttle)

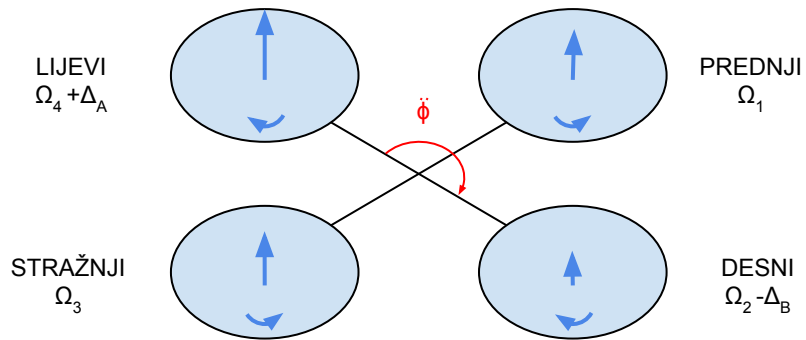
Ova naredba postiže se povećavanjem (ili smanjivanjem) brzina svih propelera za jednaki iznos. To dovodi do vertikalne sile koje podiže ili spušta kvadkopter. Ako je kvadkopter u horizontalnom smjeru vertikalni smjer unutarnjeg i vanjskog koordinatnog sustava se poklapaju. U protivnom potisak proizvodi i vertikalne i horizontalne akceleracije u vanjskom koordinatnom sustavu. Na slici 3.3 se može vidjeti naredba potiska na pojednostavljenom kvadkopteru. Ukupna kutna brzina sada postaje $\Omega_H + \Delta_A$ gdje je Δ_A pozitivna varijabla koja povećanje s obzirom na konstantan Ω_H .

- Valjanje (eng. Roll)

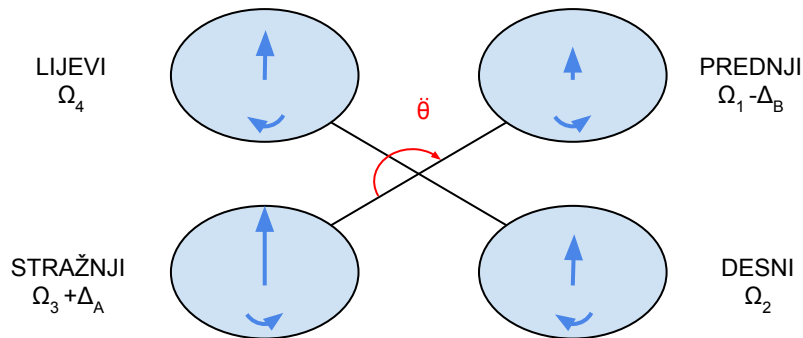
Ova naredba se postiže povećanjem ili smanjenjem brzine lijevog propelera i smanjenjem ili povećanje brzine desnog propelera kako je prikazano na slici 3.4. To dovodi do pojave okretnog momenta oko x osi unutarnjeg koordinatnog sustava. Sveukupni vertikalni potisak ostaje isti kao kod lebdenja, stoga ova naredba dovodi samo do akceleracije kuta valjanja. Varijable Δ_A i Δ_B se odabiru tako da vertikalni potisak ostane nepromijenjen.



Slika 3.3: Potisak



Slika 3.4: Valjanje



Slika 3.5: Poniranje

- Poniranje (eng. Pitch)

Ova naredba je slična naredbi valjanja. Postiže se povećanjem ili smanjenjem brzine vrtnje prednjeg rotora i smanjenjem ili povećanjem brzine stražnjeg rotora. Dovodi do okretnog momenta oko y osi unutarnjeg koordinatnog sustava. Kao i u prošlom slučaju varijable se izabiru tako da sveukupni vertikalni potisak ostaje isti. Prikaz pojednostavljenog modela kvadkoptera i kuta poniranja nalazi se na slici 3.5

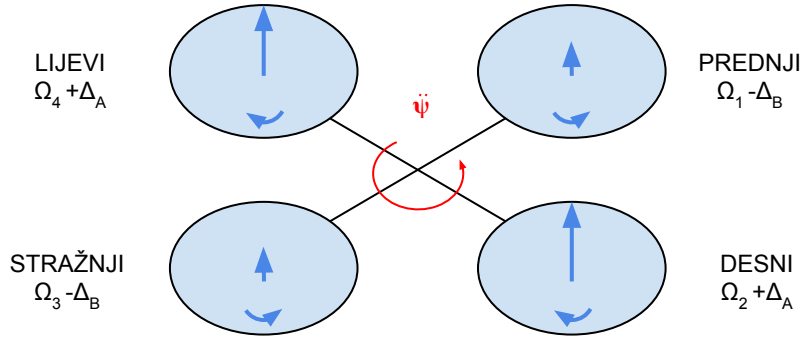
- Skretanje (eng. Yaw)

Za ostvarivanje ove naredbe potrebno je povećati ili smanjiti brzinu vrtnje prednjeg i stražnjeg para ili smanjiti i povećati brzinu lijevog i desnog para kao što je prikazano na slici 3.6. To dovodi do okretnog momenta oko z osi unutarnjeg koordinatnog sustava što dovodi do skretanja letjelice. Skretanje se ostvaruje zahvaljujući činjenici da se lijevi i desni rotor okreću u smjeru kazaljke na satu, a prednji i stražnji u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Stoga, dolazi do disbalansa u okretnim momentima i kvadkoptera se okreće oko z osi unutarnjeg koordinatnog sustava. Ako se varijable Δ_A i Δ_B odaberu tako da ne dođe do promjene vertikalnog potiska on ostaje isti kao kod lebdenja.

3.5. Kinematika i dinamika

3.5.1. Referentni koordinatni sustav

Za opisivanje pozicije i orijentacije letjelice, prema [18] neophodno je koristiti nekoliko koordinatnih sustava zbog toga što su:



Slika 3.6: Skretanje

- Newtonove jednadžbe gibanja su dane za koordinatni sustav pričvršćen za kvadkopter
- Aerodinamičke sile i momenti su dane za koordinatni sustav kvadkopter
- Senzori na letjelici kao što su akcelerometri i žiroskopi mjere poziciju u odnosu na koordinatni sustav letjelice dok GPS mjeri poziciju u odnosu na neki inercijalni koordinatni sustav
- Točke i trajektorije se specificiraju u inercijalnom koordinatnom sustavu.

3.5.2. Rotacijske matrice

Ako razmotrimo dva koordinatna sustava na slici 3.7 možemo uočiti da se vektor \mathbf{p} može prikazati preko \mathcal{F}^0 koji je određen s $(\hat{i}^0, \hat{j}^0, \hat{k}^0)$ i preko \mathcal{F}^1 koji je određen s $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$. U \mathcal{F}^0

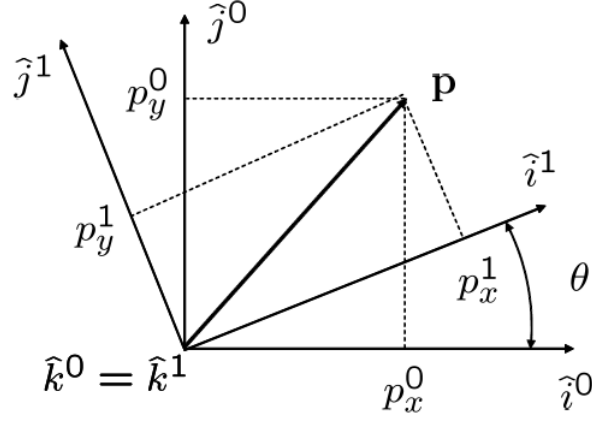
$$\mathbf{p} = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0, \quad (3.1)$$

a u \mathcal{F}^1

$$\mathbf{p} = p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1. \quad (3.2)$$

Ako prethodna dva izraza izjednačimo dobivamo

$$p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1 = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0. \quad (3.3)$$



Slika 3.7: Rotacija u 2D

Uzimajući dot produkt od obje strane s obzirom na $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$ i slažući rezultate u matricu dobivamo da je

$$\mathbf{p}^1 \triangleq \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{j}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{k}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{k}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Iz geometrije na slici 3.7 dobivamo da je

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}^0, \quad (3.5)$$

gdje je

$$\mathbf{R}_0^1 \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

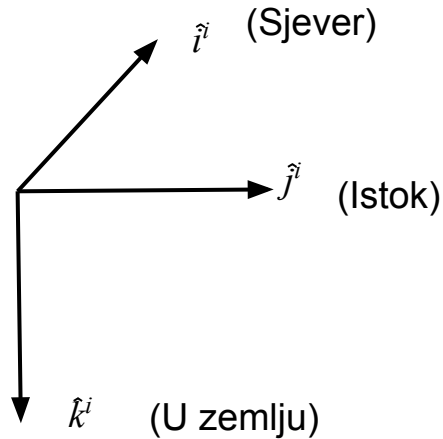
Notacija \mathbf{R}_0^1 se koristi za označavanje rotacijske matrice iz \mathcal{F}^0 u \mathcal{F}^1 koordinatni sustav.

Slično, rotacija sustava oko y osi daje

$$\mathbf{R}_0^1 \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

te oko x osi

$$\mathbf{R}_0^1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$



Slika 3.8: Inercijalni koordinatni sustav

Rotacijske matrice kao ove prethodno napisane imaju sljedeća svojstva:

- $(\mathbf{R}_a^b)^{-1} = (\mathbf{R}_a^b)^T = \mathbf{R}_a^b$
- $\mathbf{R}_b^c \mathbf{R}_a^b = \mathbf{R}_a^c$
- $\mathbf{R}_a^a = \mathbf{I}$.

U derivaciji jednadžbe (3.5) vektor \mathbf{p} ostaje konstantan i novi koordinatni sustav \mathcal{F}^1 je dobiven desnom rotacijom kuta θ .

3.5.3. Koordinatni sustavi kvadkoptera

Kod kvadkoptera koristi se više koordinatnih sustava, te će stoga biti opisani inercijalni i koordinatni sustavi vozila.

- Inercijalni koordinatni sustav \mathcal{F}^i

Inercijalni koordinatni sustav je sustav fiksiran za zemlju s ishodištem u definiranoj *home* poziciji, a prikazan je na slici 3.8. Jedinичni vektor \hat{i}^i je usmjeren prema sjeveru, \hat{j}^i prema istoku, a \hat{k}^i ide u zemlju.

- Koordinatni sustav vozila \mathcal{F}^v

Centar koordinatnog sustava vozila nalazi se u težištu kvadrokoptera. Međutim, osi \mathcal{F}^v sustava poravnate su s osima inercijalnog koordinatnog sustava.

- Koordinatni sustav vozila 1 \mathcal{F}^{v1}

Ishodište koordinatnog sustava \mathcal{F}^{v1} identično je ishodištu koordinatnog sustava \mathcal{F}^v ali je pozitivno rotirano oko osi \hat{k}^v . Sada os \hat{i}^{v1} pokazuje u smjeru nosa letjelice i to u principu označava skretanje (eng. Yaw). S obzirom na to da kvadrokopter zapravo nema "nos" mi ćemo pretpostaviti da ima zbog toga što na njega može biti montirana kamera ili slično koja gleda u jednom smjeru. Transformacija iz sustava \mathcal{F}^v u \mathcal{F}^{v1} dobiva se kao

$$\mathbf{p}^{v1} = \mathbf{R}_v^{v1}(\psi) \mathbf{p}^v \quad (3.9)$$

gdje je

$$\mathbf{R}_v^{v1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

- Koordinatni sustav vozila 2 \mathcal{F}^{v2}

Ishodište i ovog koordinatnog sustava leži u težištu, a dobiva se rotiranjem u pozitivnom smjeru sustava \mathcal{F}^{v1} oko osi \hat{j}^{v1} za kut θ . Ako je kut valjanja jednak nuli onda \hat{i}^{v2} upire prema nosu letjelice, \hat{j}^{v2} upire u desno, a \hat{k}^{v2} prema dolje. Transformacija iz \mathcal{F}^{v1} u \mathcal{F}^{v2} dobiva se kao

$$\mathbf{p}^{v2} = \mathbf{R}_v^{v2}(\psi) \mathbf{p}^{v1} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}_v^{v1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

- Koordinatni sustav vozila b \mathcal{F}^b

Ovaj koordinatni sustav dobiva se rotiranjem koordinatnog sustava \mathcal{F}^{v2} oko \hat{i}^{v2} za kut ϕ . Stoga, ishodište je u težištu, \hat{i}^b pokazuje u smjeru nosa, \hat{j}^b u desno, a \hat{k}^b ide iz trbuha. Transformacija iz \mathcal{F}^{v2} u \mathcal{F}^b dobiva se kao

$$\mathbf{p}^b = \mathbf{R}_v^b(\psi) \mathbf{p}^{v2} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{R}_v^{v1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Transformacija između \mathcal{F}^v u \mathcal{F}^b dana je kao

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_v^b(\phi\theta\psi) &= \mathbf{R}_{v2}^b(\phi)\mathbf{R}_{v1}^b(\theta)\mathbf{R}_{v2}^b(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdje je s predstavlja \sin , a c \cos .

3.5.4. Kinematika

Ako kažemo da je $\boldsymbol{\xi} = (x, y, z)^T$ vektor pozicije, a x , y i z pozicije kvadkoptera u smjeru \hat{i}^i , \hat{j}^i i \hat{k}^i u koordinatnom sustavu \mathcal{F}^i , te ako je $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ vektor brzine u koordinatnom sustavu \mathcal{F}^b možemo napisati njihovu povezanost kao

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_b^v \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = (\mathbf{R}_v^b)^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ako su ϕ , θ , ψ kutovi valjanja s obzirom na \mathcal{F}^{v2} , poniranja s obzirom na \mathcal{F}^{v1} i skretanja s obzirom na \mathcal{F}^v , a p , q i r kutne brzine zadane u koordinatnom sustavu \mathcal{F}^v njihova povezanost postaje poprilično zamršena. Potrebno je povezati p , q i r s $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ i $\dot{\psi}$. S obzirom na to da su $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ i $\dot{\psi}$ mali i da je

$$\mathbf{R}_b^{v2}(\dot{\phi}) = \mathbf{R}_{v2}^{v1}(\dot{\theta}) = \mathbf{R}_{v1}^v(\dot{\psi}) = \mathbf{I} \quad (3.17)$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_{v2}^b(\dot{\phi}) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{v2}^b(\dot{\phi}) \mathbf{R}_{v1}^{v2}(\dot{\theta}) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{v2}^b(\dot{\phi}) \mathbf{R}_{v1}^{v2}(\dot{\theta}) \mathbf{R}_v^{v1}(\dot{\psi}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ivertiranjem prijašnjeg izraza dobivamo

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

3.5.5. Dinamika krutog tijela

Neka \mathbf{v} bude vektor brzine kvadkoptera. Newtonovi zakoni vrijede samo za inercijalni koordinatni sustav, stoga Newtonov zakon primijenjen na translacijsko gibanje je

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt_i} = \mathbf{f}, \tag{3.20}$$

gdje je m masa kvadkoptera, \mathbf{f} je ukupna sila primijenjena na kvadkoptera, a $\frac{d}{dt_i}$ je vremenska derivacija u inercijalnom koordinatnom sustavu. Iz Coriolisovih jednadžbi dobivamo da je

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt_i} = m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt_b} + \boldsymbol{\omega}_{b/i} \times \mathbf{v} \right) = \mathbf{f}, \tag{3.21}$$

gdje je $\omega_{b/i}$ kutna brzina okvira s obzirom na inercijalni koordinatni sustav. S obzirom na to da se upravljačka sila računa i primjenjuje u koordinatnom sustavu vozila \mathcal{F}^b i da je ω mjerena u koordinatama vozila jednadžbu (3.21) izrazit ćemo u koordinatama

vozila gdje je $\mathbf{v}^b \triangleq (u, v, w)^T$ i $\boldsymbol{\omega}_{b/i} \triangleq (p, q, r)^T$. Stoga u koordinatama vozila izraz (3.21) postaje

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Za rotacijsko gibanje, Newtonov drugi zakon govori da je

$$\frac{d\mathbf{h}^b}{dt_i} = \mathbf{m}, \quad (3.23)$$

gdje je \mathbf{h} kutni moment, a \mathbf{m} primijenjeni moment. Koristeći opet Coriolisa dobivamo

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \frac{d\mathbf{h}}{dt_b} + \boldsymbol{\omega}_{b/i} \times \mathbf{h} = \mathbf{m}. \quad (3.24)$$

Ponovo izraz (3.24) se najlakše rješava u \mathcal{F}^b koordinatnom sustavu gdje je $\mathbf{h}^b = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b$, a \mathbf{I} je matrica inercija koje se izračunava kao

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

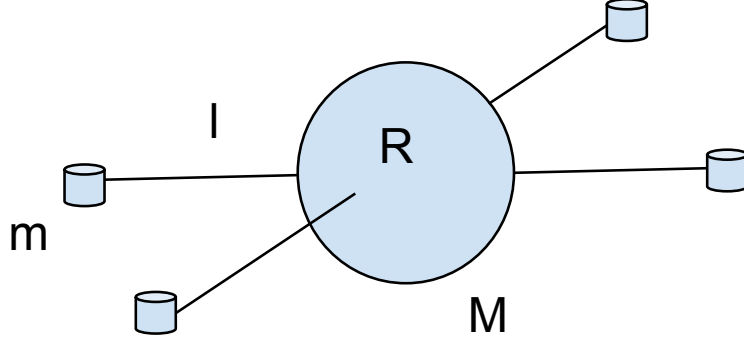
S obzirom na to da je kvadkopter simetričan oko sve tri osi, odnosno $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ matrica inercije je zapravo

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

a njen inverz je

$$\mathbf{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Inercija za punu sferu se računa kao $I = 2MR^2/5$ te time dobivamo,



Slika 3.9: Model kvadkoptera

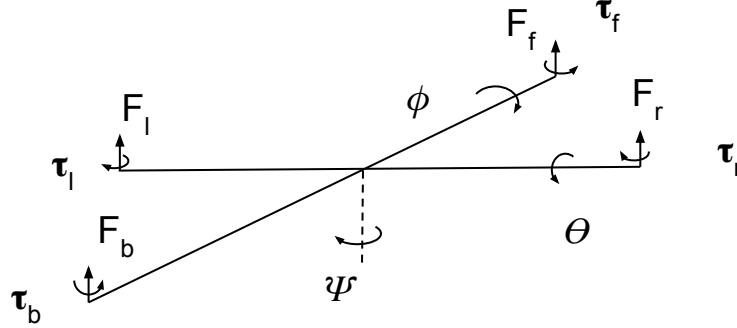
$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m, \\
 I_y &= \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m, \\
 I_z &= \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ako definiramo $\mathbf{m}^b \triangleq (M_x, M_y, M_z)^T$ izraz (3.24) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} qr \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} M_x \\ \frac{1}{I_y} M_y \\ \frac{1}{I_z} M_z \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Kinematički i dinamički modeli kvadkoptera sa šest stupnjeva slobode mogu se sažeti kao:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & -c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$



Slika 3.10: Sile i momenti

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} qr \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} M_x \\ \frac{1}{I_y} M_y \\ \frac{1}{I_z} M_z \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

3.5.6. Sile i momenti

Sada ćemo proći kroz sile i momente koje djeluju na kvadkopter. Zbog samog dizajna kvadkoptera aerodinamičke sile koje djeluju na njega su zanemarive. Kada zanemarimo aerodinamičke sile ostaju nam sile zbog gravitacije i zbog četiri propelera. Kao što se može vidjeti iz slike 3.10 svaki motor proizvodi silu F i moment M . Ukupna silu koja djeluje na kvadkopter dobivamo zbrajanjem sila svih motora odnosno

$$F = F_f + F_r + F_b + F_l, \quad (3.34)$$

gdje f, r, b i l označavaju *front*, *right*, *back* i *left* odnosno *prednji*, *desni*, *stražnji* i *lijevi*. Moment valjanja se dobiva iz sila lijevog i desnog motora kao

$$M_x = l(F_l - F_r), \quad (3.35)$$

a moment poniranja iz prednjeg i stražnjeg motora kao

$$M_y = l(F_f - F_b). \quad (3.36)$$

Zbog 3. Newtonovog zakona, okretni momenti propelera proizvode moment skretanja na tijelu kvadrokoptera. Smjer tog momenta bit će suprotan od smjeru okretanja propelera. Stoga, ukupni moment skretanja dobivamo kao

$$M_z = \tau_r + \tau_l - \tau_f - \tau_b. \quad (3.37)$$

Uzgoni i okretni moment koji proizvode propeleri je proporcionalan kvadratu kutne brzine. Ako pretpostavimo da je kutna brzina direktno proporcionalna naredbi pulsno širinske modulacije možemo silu i moment svakog motora zapisati kao

$$F_* = k_1 \delta_*, \quad (3.38)$$

$$M_* = k_2 \delta_*, \quad (3.39)$$

gdje su k_1 i k_2 konstante koje treba odrediti eksperimentalno, δ_* je upravljački signal motora, a $*$ predstavlja f, r, b i l . Sile i momente možemo zapisati u matricnoj formi radi preglednosti kao

$$\begin{bmatrix} F \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ 0 & -lk_1 & 0 & lk_1 \\ lk_1 & 0 & lk_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{M} \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Strategije upravljanja koje će biti poslije biti izvedene odnosit će se na sile i momente, a stvarne naredbe motorima mogu se dobiti kao

$$\begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Uz sile motora gravitacija također djeluje na kvadkopter. U koordinatnom sustavu vozila \mathcal{F}^v sila gravitacije koja djeluje na centar mase dana je kao

$$\mathbf{f}_g^v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

S obzirom na to da je v u izrazu 3.31 izražen u \mathcal{F}^b potrebno je transformirati prethodnu jednadžbu da dobijemo

$$\mathbf{f}_g^b = \mathbf{R}_v^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Stoga, izrazi 3.30 do 3.33 postaju

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & -c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \sin \theta \\ g \cos \theta \sin \phi \\ g \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} qr \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_z} \tau_\psi \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

3.6. Pojednostavljeni modeli

Izrazi 3.44 do 3.47 su koje bi se koriste za simuliranje gibanja u šest stupnjeva slobode. No, zbog svoje kompliciranosti nisu pogodne za izvod upravljanja. Za kvadkopter mi nismo u stanju estimirati unutarnju poziciju ili kut ψ . Umjesto toga, zanimat će nas

relativna pozicija i smjer kvadrokoptera u odnosu na neku točku na zemlji. Relativna pozicija kvadrokoptera mjerit će se u koordinatnom sustavu vozila 1. Koordinatni sustav vozila 1 pogodan je s obzirom na to da su x, y i z pozicije mjerene u odnosu na zemlju ali su orijentirane na vozila za razliku od unutarnjih veličina. Neka x, y i z predstavljaju relativni vektor pozicije između točke i vozila u \mathcal{F}^{v1} koordinatnom sustavu. Time jednadžba 3.44 postaje

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & s\phi s\theta & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Pod pretpostavkom da su kutovi ϕ i θ mali jednadžba 3.46 se može pojednostaviti kao

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Na sličan način možemo pojednostaviti izraz 3.47. Pretpostavljajući da su umnošci qr , pr i pq zanemarivo mali dobivamo da je

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} M_x \\ \frac{1}{I_y} M_y \\ \frac{1}{I_z} M_z \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

te kombinacijom s jednadžbom 3.49 dobivamo

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} M_x \\ \frac{1}{I_y} M_y \\ \frac{1}{I_z} M_z \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Deriviranje izraza 3.44 i zanemarivanjem \dot{R}_b^v dobivamo

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Zanemarivanjem Coriolisovih članova i ubacivanjem jednadžbe 3.45 u prethodnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c\phi s\theta c\psi - s\phi s\psi \\ -c\phi s\theta s\psi + s\phi c\psi \\ -c\phi c\theta \end{bmatrix} \frac{F}{m} \quad (3.53)$$

Pojednostavljene jednačbe kvadkoptera dane su kao:

$$\ddot{x} = (-\cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) \frac{F}{m}, \quad (3.54)$$

$$\ddot{y} = (-\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi) \frac{F}{m}, \quad (3.55)$$

$$\ddot{z} = g - (\cos \phi \cos \theta) \frac{F}{m}, \quad (3.56)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} M_x, \quad (3.57)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_x} M_y, \quad (3.58)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_x} M_z. \quad (3.59)$$

Prethodne jednačbe dinamike možemo još pojednostavniti ako pod pretpostavkom malih kutova zanemarimo članove u zagradama. Time dobivamo nove jednačbe

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}, \quad (3.60)$$

$$\ddot{y} = \frac{F}{m}, \quad (3.61)$$

$$\ddot{z} = g - \frac{F}{m}, \quad (3.62)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} M_x, \quad (3.63)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_x} M_y, \quad (3.64)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_x} M_z. \quad (3.65)$$

3.7. Upravljanje

Upravljanje kvadkoptera bit će izvedeno kao što je to učinjeno u [19], [20] i [21]. Započet ćemo s najjednostavnijim dinamičkim modelom ali ćemo sada sile i momente zamijeniti upravljačkim varijablama tako da u_1 odgovara F , a u_2, u_3 i u_4 odgovaraju M_x, M_y i M_z

$$m\ddot{x} = \theta u_1, \quad (3.66)$$

$$m\ddot{y} = -\phi u_1, \quad (3.67)$$

$$m\ddot{z} = -mg + u_1, \quad (3.68)$$

$$I_x\ddot{\phi} = u_2, \quad (3.69)$$

$$I_x\ddot{\theta} = u_3, \quad (3.70)$$

$$I_x\ddot{\psi} = u_4. \quad (3.71)$$

Cilj upravljanja je praćenje željene pozicije kvadrokoptera $\{x_d(t), y_d(t), z_d(t)\}$, dok je $\psi_d = 0$. Prije početka potrebno je definirati regulacijske pogreške

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - x_d(t), \\ \tilde{y} &= y - y_d(t), \\ \tilde{z} &= z - z_d(t). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Prvi korak je sinteza zakona upravljanja u_1 , što je potrebno za slijeđenje po visini, odnosno komponente referentne trajektorije $z_d(t)$. Kombiniranjem prethodnog izraza s izrazom 3.68 dobivamo

$$m\ddot{\tilde{z}} = -m\ddot{z}_d - mg + u_1 + d_{mz}. \quad (3.73)$$

Ako izaberemo da je

$$u_1 = m(\ddot{z}_d + g - k_{z1}\dot{\tilde{z}} - k_{z0}\tilde{z}), \quad (3.74)$$

dobivamo da je dinamika pogreške

$$\ddot{\tilde{z}} + k_{z1}\dot{\tilde{z}} + k_{z0}\tilde{z} = 0, \quad (3.75)$$

koja je asimptotski stabilna za vrijednosti pojačanja k_{z1} i $k_{z0} > 0$.

Nakon u_1 potrebno je napraviti sintezu zakona upravljanja za u_2 , koji će omogućiti slijeđenje komponente referentne trajektorije $y_d(t)$. Iz jednadžbe 3.67 dobivamo dinamiku greške

$$m\ddot{\tilde{y}} = -m\ddot{y}_d(t) - \phi u_1. \quad (3.76)$$

Kako smo u_1 već odredili, moramo derivirati prethodnu dinamiku pogreške sve dok nam se ne pojavi upravljačka varijabla u_2 . Prva derivacija

$$m\ddot{\tilde{y}} = -m\ddot{y}_d(t) - \dot{\phi}u_1 - \phi\dot{u}_1, \quad (3.77)$$

te druga,

$$m\tilde{y}^{(4)} = -m\tilde{y}_d^{(4)} - \ddot{\phi}u_1 - 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \phi\ddot{u}_1. \quad (3.78)$$

Sada možemo iskoristi jednadžbu 3.69 te time dobivamo

$$m\tilde{y}^{(4)} = -m y_d^{(4)} - \frac{u_2}{I_x} u_1 - 2\dot{\phi}\dot{u}_1 - \phi\ddot{u}_1. \quad (3.79)$$

i eksplicitno pojavljivanje druge upravljačke varijable. Izborom upravljačke varijable

$$u_2 = -\frac{I_x}{u_1} (m y_d^{(4)} + 2\dot{\phi}\dot{u}_1 + \phi\ddot{u}_1) + \frac{m I_x}{u_1} (k_{y3} \ddot{\tilde{y}} + k_{y2} \dot{\tilde{y}} + k_{y1} \tilde{\dot{y}} + k_{y0} \tilde{y}), \quad (3.80)$$

dobivamo dinamiku pogreške

$$\tilde{y}^{(4)} + k_{y3} \ddot{\tilde{y}} + k_{y2} \dot{\tilde{y}} + k_{y1} \tilde{\dot{y}} + k_{y0} \tilde{y} = 0, \quad (3.81)$$

gdje su k_{y3}, k_{y2}, k_{y1} i k_{y0} pozitivna pojačanja koja zadovoljavaju Hurwitzov kriterij stabilnosti.

Za kraj ostaje još napraviti sintezu zakona upravljanja u_3 koji će omogućiti slijeđenje komponente referentne trajektorije $x_d(t)$. Iz jednadžbe 3.66 dinamičkog modela dobivamo dinamiku pogreške

$$m\ddot{\tilde{x}} = -m\ddot{x}_d(t) + \theta u_1. \quad (3.82)$$

Kao i u prethodnom slučaju potrebno je derivirati jednadžbu dok se eksplicitno ne pojavi upravljačka varijabla u_3 . Prva derivacija,

$$m\ddot{\tilde{x}} = -m\ddot{x}_d(t) + \dot{\theta} + \theta\dot{u}_1, \quad (3.83)$$

te druga

$$m\tilde{x}^{(4)} = -m x_d^{(4)}(t) + \ddot{\theta} u_1 + 2\dot{\theta}\dot{u}_1 + \theta\ddot{u}_1 \quad (3.84)$$

U prethodnu jednadžbu možemo ubaciti jednadžbu 3.70 i time dobivamo da je

$$m\tilde{x}^{(4)} = -m x_d^{(4)}(t) + \frac{u_3}{I_y} u_1 + 2\dot{\theta}\dot{u}_1 + \theta\ddot{u}_1 \quad (3.85)$$

te nam se pojavila upravljačka varijabla u_3 . Ako sada izaberemo da je

$$u_3 = \frac{I_y}{u_1} (m x_d^{(4)} + 2\dot{\theta}\dot{u}_1 + \theta\ddot{u}_1) + \frac{m I_y}{u_1} (k_{x3} \ddot{\tilde{x}} + k_{x2} \dot{\tilde{x}} + k_{x1} \tilde{\dot{x}} + k_{x0} \tilde{x}), \quad (3.86)$$

dobivamo konačnu dinamiku pogreške

$$\tilde{x}^{(4)} + k_{x3} \ddot{\tilde{x}} + k_{x2} \dot{\tilde{x}} + k_{x1} \tilde{\dot{x}} + k_{x0} \tilde{x} = 0, \quad (3.87)$$

gdje su k_{x3}, k_{x2}, k_{x1} i k_{x0} pozitivna pojačanja koja zadovoljavaju Hurwitzov kriterij stabilnosti. Da bi upravljačke varijable u_2 i u_3 mogli prikazati preko varijabli stanja,

potrebno je izvesti eksplicitnu ovisnost o varijablama stanja za prvu i drugu derivaciju upravljačke varijable u_1 te za drugu i treću derivaciju pogrešaka \tilde{x} , \tilde{y} i \tilde{z} . Imamo

$$\dot{u}_1 = m(\ddot{(z)}_d(t) - k_{z1}\ddot{\tilde{z}} - k_{z0}\dot{\tilde{z}}), \quad (3.88)$$

$$\ddot{u}_1 = m(z_d^{(4)}(t) - k_{z1}\dddot{\tilde{z}} - k_{z0}\ddot{\tilde{z}}) \quad (3.89)$$

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d(t) = \frac{1}{m}\theta u_1 - \ddot{x}_d(t), \quad (3.90)$$

$$\ddot{\tilde{x}} = \frac{1}{m}\dot{\theta}u_1 + \frac{1}{m}\theta\dot{u}_1 - \ddot{x}_d(t), \quad (3.91)$$

$$\ddot{\tilde{y}} = \ddot{y} - \ddot{y}_d(t) = -\frac{1}{m}\phi u_1 - \ddot{y}_d(t), \quad (3.92)$$

$$\ddot{\tilde{y}} = -\frac{1}{m}\dot{\phi}u_1 + \frac{1}{m}\phi\dot{u}_1 - \ddot{y}_d(t), \quad (3.93)$$

$$\ddot{\tilde{z}} = \ddot{z} - \ddot{z}_d(t) = -g + \frac{1}{m}u_1 - \ddot{z}_d(t), \quad (3.94)$$

$$\ddot{\tilde{x}} = \frac{1}{m}\dot{u}_1 - \ddot{z}_d(t). \quad (3.95)$$

Iz zakona upravljanja vidljivo je da je za slijeđenje referentne trajektorije $\{x_d(t), y_d(t) \text{ i } z_d(t)\}$ dovoljno primijeniti tri upravljačke varijable. Četvrta upravljačka varijabla može se primijeniti na stabilizaciju kuta ψ .

4 Algebarska identifikacija parametara letjelice

4.1. Identifikacija mase

Za identifikaciju mase možemo koristiti bilo koju od prve tri jednadžbe iz pojednostavljenog dinamičkog modela kvadkoptera ali ovdje je odabrana druga zbog oznaka,

$$m\ddot{y}(t) = (\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi))F_z. \quad (4.1)$$

Ako desni dio izraza (4.1) zapišemo kao

$$f(t) = (\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi))F_z \quad (4.2)$$

dobivamo

$$m\ddot{y}(t) - f(t) = 0. \quad (4.3)$$

Dobiveni izraz možemo podijeliti s masom te pritom dobivamo

$$\ddot{y}(t) - kf(t) = 0 \quad (4.4)$$

gdje je,

$$k = \frac{1}{m}. \quad (4.5)$$

Izraz je napisan na takav način da bude što sličniji onome s kojim smo se već susreli. Kao i prije na izraz (4.4) primijeniti ćemo Laplace-ovu transformaciju i time dobivamo

$$s^2y(s) - sy_0 - v_0 - kF(s) = 0 \quad (4.6)$$

ili

$$s^2y(s) - kF(s) = c_1s + c_0. \quad (4.7)$$

Izraz 4.7 možemo zapisati kao

$$s^2y(s) - kF(s) = R(s), \quad (4.8)$$

gdje je

$$R(s) = c_1s + c_0. \quad (4.9)$$

Već je pokazano da primjenom diferencijskog operatora drugog reda, δ_q^2 , se poništavaju početni uvjeti, a izraz (4.8) će sada postati

$$z_2(s) - kz_0(s) = 0, \quad (4.10)$$

gdje je

$$z_0(s) = F(s + 2q) - 2F(s + q) + F(s), \quad (4.11)$$

a

$$z_2(s) = (s + 2q)^2y(s + 2q) - 2(s + q)^2y(s + q) + s^2y(s). \quad (4.12)$$

Sada ćemo primijeniti invarijantno filtriranje s različitim polovima jer se to pokazalo kao jednostavnija metoda. Invarijantni filter

$$\frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} \quad (4.13)$$

primijeniti ćemo na izraz (4.10) i time dobivamo

$$\hat{z}_2(s) - k\hat{z}_0(s) = 0, \quad (4.14)$$

gdje je

$$\hat{z}_0(s) = G_{00}(s)[F(s + 2q) - 2F(s + q) + F(s)], \quad (4.15)$$

$$\hat{z}_2(s) = G_{22}(s)y(s + 2q) - 2G_{21}(s)y(s + q) + G_{20}(s)y(s), \quad (4.16)$$

a

$$G_{00}(s) = \frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{001}}{s + a_1} + \frac{A_{002}}{s + a_2} + \frac{A_{003}}{s + a_3}, \quad (4.17)$$

$$G_{22}(s) = \frac{(s + 2q)^2}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{221}}{s + a_1} + \frac{A_{222}}{s + a_2} + \frac{A_{223}}{s + a_3}, \quad (4.18)$$

$$G_{21}(s) = \frac{(s + q)^2}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{211}}{s + a_1} + \frac{A_{212}}{s + a_2} + \frac{A_{213}}{s + a_3}, \quad (4.19)$$

$$G_{20}(s) = \frac{s^2}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)} = \frac{A_{201}}{s + a_1} + \frac{A_{202}}{s + a_2} + \frac{A_{203}}{s + a_3}. \quad (4.20)$$

Koeficijenti će biti jednaki kao i prije ali dani su u sljedećim izrazima radi preglednosti.

$$\begin{aligned} A_{001} &= \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\ A_{002} &= \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\ A_{003} &= \frac{1}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} A_{221} &= \frac{(2q - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\ A_{222} &= \frac{(2q - a_2)^2}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\ A_{223} &= \frac{(2q - a_3)^2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} A_{211} &= \frac{(q - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\ A_{212} &= \frac{(q - a_2)^2}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\ A_{213} &= \frac{(q - a_3)^2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} A_{201} &= \frac{a_1^2}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\ A_{202} &= \frac{a_2^2}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}, \\ A_{203} &= \frac{a_3^2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Sada je potrebno dobivene koeficijente vratiti u izraze (4.15) i (4.16). Iz izraza (4.16) dobivamo isto što i prije. Odnosno

$$\begin{aligned} \hat{z}_2(s) &= \left(\frac{A_{221}}{s + a_1} + \frac{A_{222}}{s + a_2} + \frac{A_{223}}{s + a_3} \right) y(s + 2q) \\ &\quad - 2 \left(\frac{A_{211}}{s + a_1} + \frac{A_{212}}{s + a_2} + \frac{A_{213}}{s + a_3} \right) y(s + q) \\ &\quad + \left(\frac{A_{201}}{s + a_1} + \frac{A_{202}}{s + a_2} + \frac{A_{203}}{s + a_3} \right) y(s), \end{aligned} \tag{4.25}$$

ako sada grupiramo članove s istim nazivnikom dobivamo

$$\begin{aligned}\hat{z}_2(s) &= \frac{1}{s+a_1}[A_{221}y(s+2q) - 2A_{211}y(s+q) + A_{201}y(s)] \\ &+ \frac{1}{s+a_2}[A_{222}y(s+2q) - 2A_{212}y(s+q) + A_{202}y(s)] \\ &+ \frac{1}{s+a_3}[A_{223}y(s+2q) - 2A_{213}y(s+q) + A_{203}y(s)],\end{aligned}\quad (4.26)$$

što je jednako kao i prije. Nova jednadžba dolazi iz (4.15) uvrštavanjem koeficijenata te grupiranjem kao u (4.26) dobivamo

$$\begin{aligned}\hat{z}_0(s) &= \frac{1}{s+a_1}A_{001}[F(s+2q) - 2F(s+q) + F(s)] \\ &+ \frac{1}{s+a_2}A_{002}[F(s+2q) - 2F(s+q) + F(s)] \\ &+ \frac{1}{s+a_3}A_{003}[F(s+2q) - 2F(s+q) + F(s)].\end{aligned}\quad (4.27)$$

Dobivene izraze (4.26) i (4.27) prebacit ćemo, kao i prije, u vremensku domenu da bi mogli izračunati konstantu k . Time dobivamo

$$\begin{aligned}(s+a_1)x_1 &= [A_{221}y(s+2q) - 2A_{211}y(s+q) + A_{201}y(s)], \\ (s+a_2)x_2 &= [A_{222}y(s+2q) - 2A_{212}y(s+q) + A_{202}y(s)], \\ (s+a_3)x_3 &= [A_{223}y(s+2q) - 2A_{213}y(s+q) + A_{203}y(s)], \\ (s+a_1)x_4 &= A_{001}[F(s+2q) - 2F(s+q) + F(s)], \\ (s+a_2)x_5 &= A_{002}[F(s+2q) - 2F(s+q) + F(s)], \\ (s+a_3)x_6 &= A_{003}[F(s+2q) - 2F(s+q) + F(s)],\end{aligned}\quad (4.28)$$

te zatim

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1x_1 + [A_{221}e^{-2qt} - 2A_{211}e^{-qt} + A_{201}]y(t), \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2 + [A_{222}e^{-2qt} - 2A_{212}e^{-qt} + A_{202}]y(t), \\ \dot{x}_3 &= -a_3x_3 + [A_{223}e^{-2qt} - 2A_{213}e^{-qt} + A_{203}]y(t), \\ \dot{x}_4 &= -a_1x_4 + A_{001}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]f(t), \\ \dot{x}_5 &= -a_2x_5 + A_{002}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]f(t), \\ \dot{x}_6 &= -a_3x_6 + A_{003}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]f(t),\end{aligned}\quad (4.29)$$

i izlazne jednadžbe

$$\begin{aligned}\hat{z}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t), \\ \hat{z}_0(t) &= x_4(t) + x_5(t) + x_6(t).\end{aligned}\quad (4.30)$$

Jednadžba za izračun konstante opruge sada izgleda

$$k = \frac{\hat{z}_2(t)}{\hat{z}_0(t)} \quad (4.31)$$

i kao i prije primijenit će se nelinearno invarijantno filtriranje koje ćemo derivirati i dobiti još dvije varijable stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_7 &= |\hat{z}_2(t)|, \\ \dot{x}_8 &= |\hat{z}_0(t)|. \end{aligned} \quad (4.32)$$

U konačnici masu kvadrokoptera dobivamo iz izraza (4.5).

4.2. Identifikacija momenata tromosti

Jednadžbe momenata tromosti kvadrokoptera

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} M_x, \quad (4.33)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} M_y, \quad (4.34)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} M_z, \quad (4.35)$$

možemo malo preformulirati i time dobivamo

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\phi} - M_x &= 0, \\ I_y \ddot{\theta} - M_y &= 0, \\ I_z \ddot{\psi} - M_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ako sada svaku jednadžbu iz izraza (4.36) podijelimo s pripadajućim momentom tromosti dobivamo

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} - k_x M_x &= 0, \\ \ddot{\theta} - k_y M_y &= 0, \\ \ddot{\psi} - k_z M_z &= 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

gdje je

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{I_x}, \\ k_y &= \frac{1}{I_y}, \\ k_z &= \frac{1}{I_z}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Daljnji izvod bit će prikazan samo za prvu jednadžbu iz izraza (4.37) i bit će vrlo sličan onome za identifikaciju mase stoga će neki koraci biti preskočeni. Početak je naravno prebacivanje u područje kompleksne varijable, stoga prva jednadžba iz (4.37) postaje

$$s^2\phi(s) - k_x M_x(s) = R(s), \quad (4.39)$$

gdje je

$$R(s) = c_1 s + c_0. \quad (4.40)$$

Nadalje primjenjujemo diferencijski operator s kojim se poništavaju početni uvjeti te se ponovo dobiva izraz (4.10) u kojemu je sada

$$z_0(s) = M_x(s + 2q) - 2M_x(s + q) + M_x(s), \quad (4.41)$$

a

$$z_2(s) = (s + 2q)^2\phi(s + 2q) - 2(s + q)^2\phi(s + q) + s^2\phi(s). \quad (4.42)$$

Primjenom invarijantnog filtera iz izraza (4.13) na izraze (4.41) i (4.42) dobivamo

$$\hat{z}_0(s) = G_{00}(s)[M_x(s + 2q) - 2M_x(s + q) + M_x(s)], \quad (4.43)$$

$$\hat{z}_2(s) = G_{22}(s)\phi(s + 2q) - 2G_{21}(s)\phi(s + q) + G_{20}(s)\phi(s). \quad (4.44)$$

Koeficijenti prethodnih jednadžbi će biti jednaki kao u izrazima od (4.17) do (4.24). Nadalje, jednadžbe (4.26) i (4.27) će u ovom slučaju biti nešto drugačije odnosno,

$$\begin{aligned} \hat{z}_2(s) = & \frac{1}{s + a_1}[A_{221}\phi(s + 2q) - 2A_{211}\phi(s + q) + A_{201}\phi(s)] \\ & + \frac{1}{s + a_2}[A_{222}\phi(s + 2q) - 2A_{212}\phi(s + q) + A_{202}\phi(s)] \\ & + \frac{1}{s + a_3}[A_{223}\phi(s + 2q) - 2A_{213}\phi(s + q) + A_{203}\phi(s)], \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{z}_0(s) = & \frac{1}{s + a_1}A_{001}[M_x(s + 2q) - 2M_x(s + q) + M_x(s)], \\ & + \frac{1}{s + a_2}A_{002}[M_x(s + 2q) - 2M_x(s + q) + M_x(s)], \\ & + \frac{1}{s + a_3}A_{003}[M_x(s + 2q) - 2M_x(s + q) + M_x(s)]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Po uzoru na izraz (4.29) diferencijalne jednadžbe u vremenskoj domeni sada postaju

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + [A_{221}e^{-2qt} - 2A_{211}e^{-qt} + A_{201}]\phi(t), \\
 \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + [A_{222}e^{-2qt} - 2A_{212}e^{-qt} + A_{202}]\phi(t), \\
 \dot{x}_3 &= -a_3 x_3 + [A_{223}e^{-2qt} - 2A_{213}e^{-qt} + A_{203}]\phi(t), \\
 \dot{x}_4 &= -a_1 x_4 + A_{001}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]M_x(t), \\
 \dot{x}_5 &= -a_2 x_5 + A_{002}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]M_x(t), \\
 \dot{x}_6 &= -a_3 x_6 + A_{003}[e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1]M_x(t),
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

i izlazne jednadžbe

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t), \\
 \hat{z}_0(t) &= x_4(t) + x_5(t) + x_6(t).
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

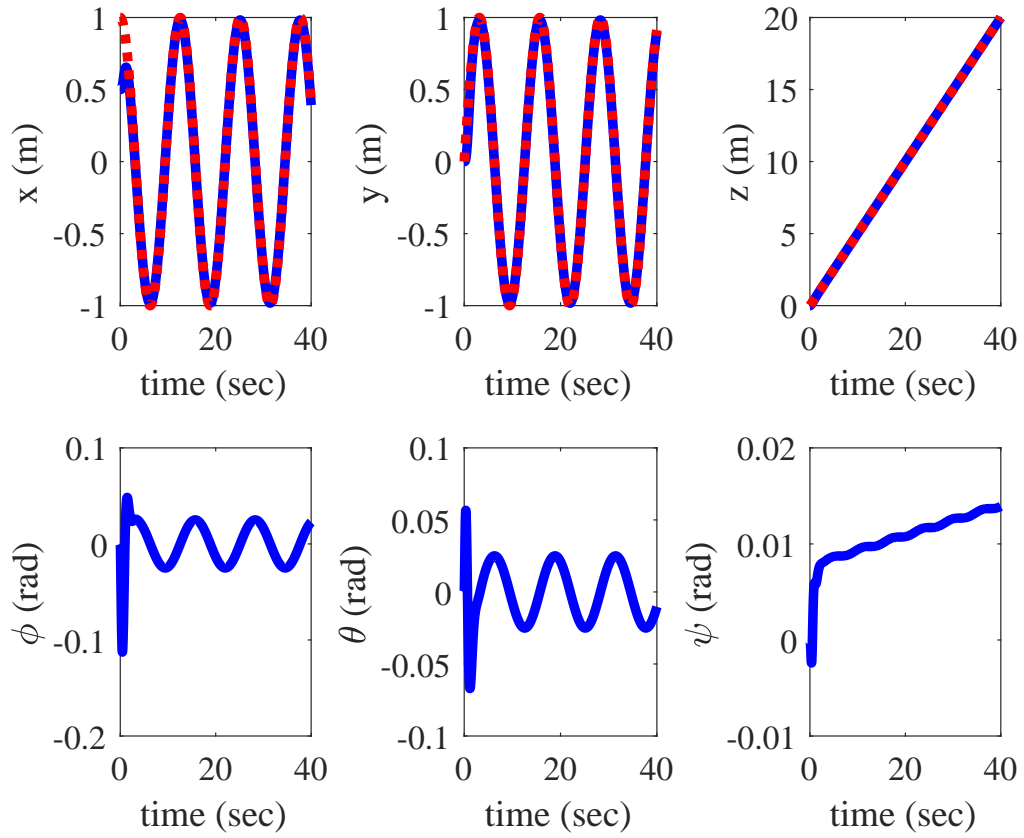
Konačno ,

$$k_x = \frac{\hat{z}_2(t)}{\hat{z}_0(t)}, \tag{4.49}$$

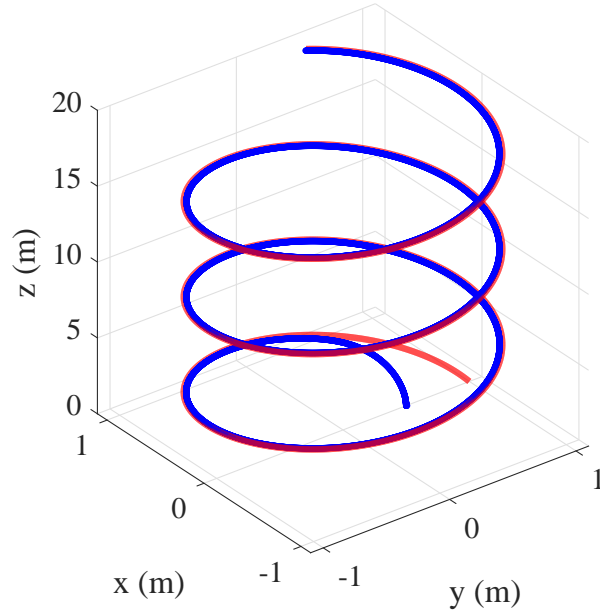
na jednaki način se dobivaju i druge dvije konstante k_y i k_z .

5 Simulacijski rezultati

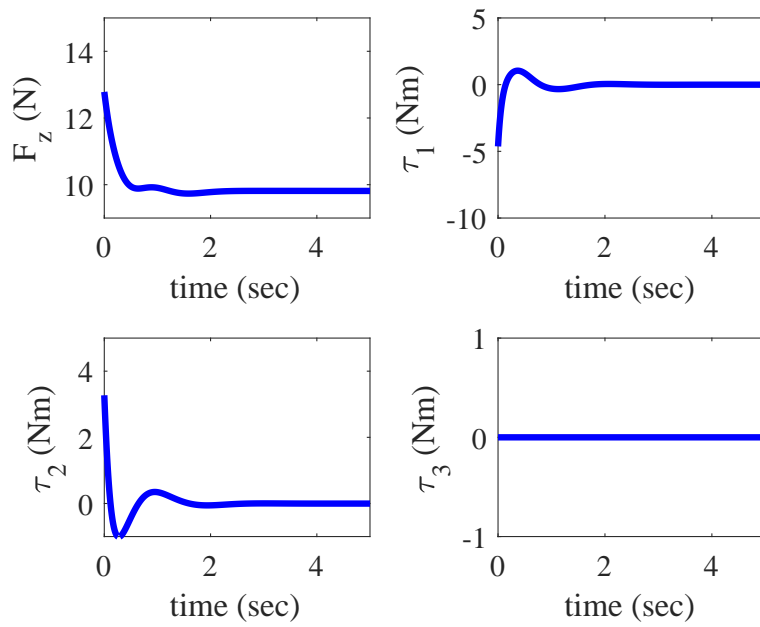
Prethodni izvodi implementirani su u Matlabu te se testiraju na tri dinamička modela kvadkoptera, odnosno punom modelu, pojednostavljenom te najjednostavnijem. Sinteza regulatora napravljena je u potpoglavlju Upravljanje, a prati se spiralna trajektorija. Prvo će biti prikazani simulacijski rezultati za sve tri metode bez identifikacije parametara da bi se poslije imali na što referencirati. Na slikama od 5.1 do 5.4 nalaze se simulacijski rezultati za puni dinamički model kvadkoptera. Na slici 5.1 prikazane su vrijednosti šest varijabli stanja, na 5.2 nalazi se slijeđenje referentne trajektorije, na 5.3 su vrijednosti upravljačkih varijabli te na 5.4 su prikazane pogreške slijeđenja. Isti poređak slika je i za ostala dva dinamička modela. Simulacijski rezultati za pojednostavljeni model prikazani su na slikama od 5.5 do 5.8 te za najjednostavniji model na slikama od 5.9 do 5.12.



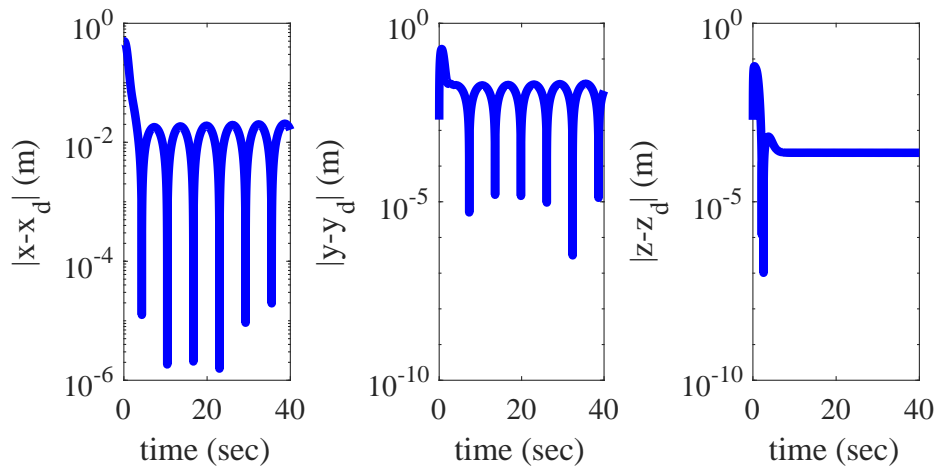
Slika 5.1: Varijable stanja punog dinamičkog modela kvadkoptera



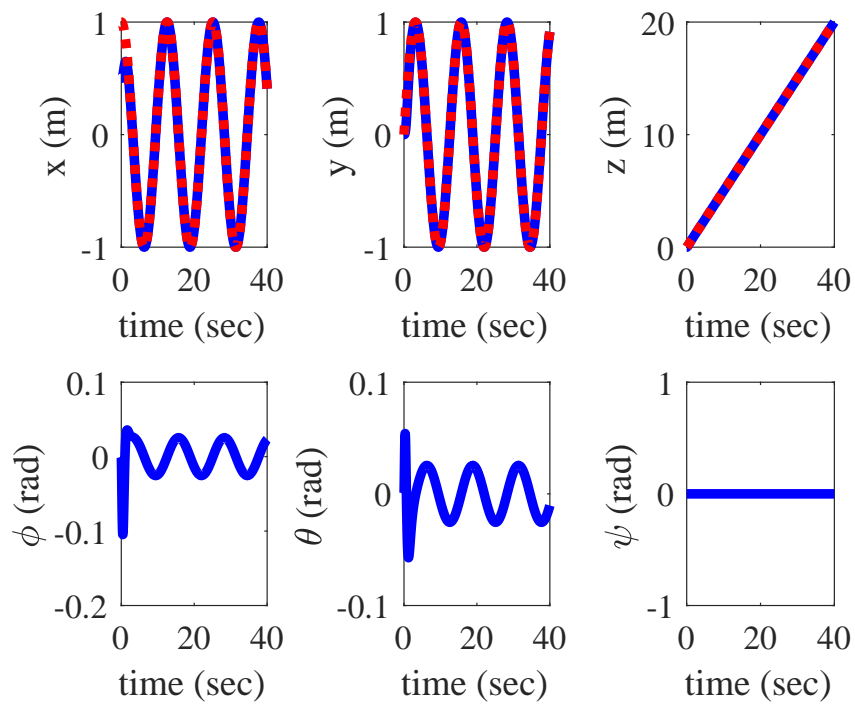
Slika 5.2: Slijeđene referentne trajektorije za puni dinamički model



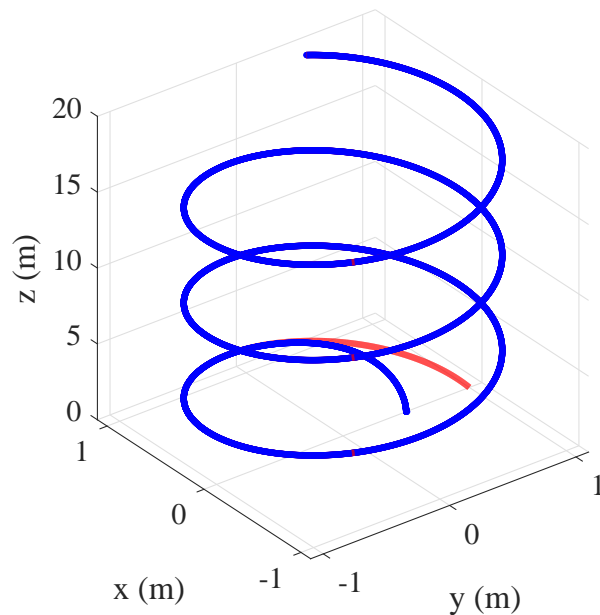
Slika 5.3: Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela



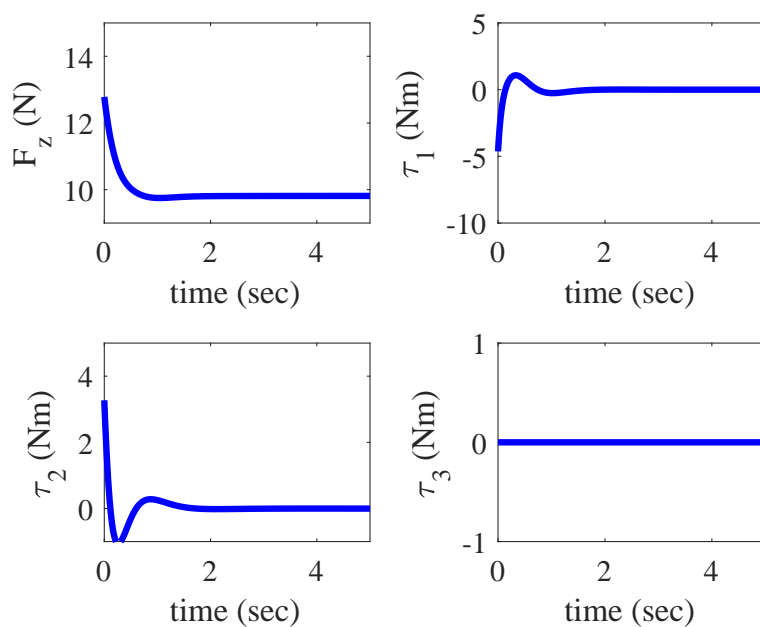
Slika 5.4: Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod punog dinamičkog modela



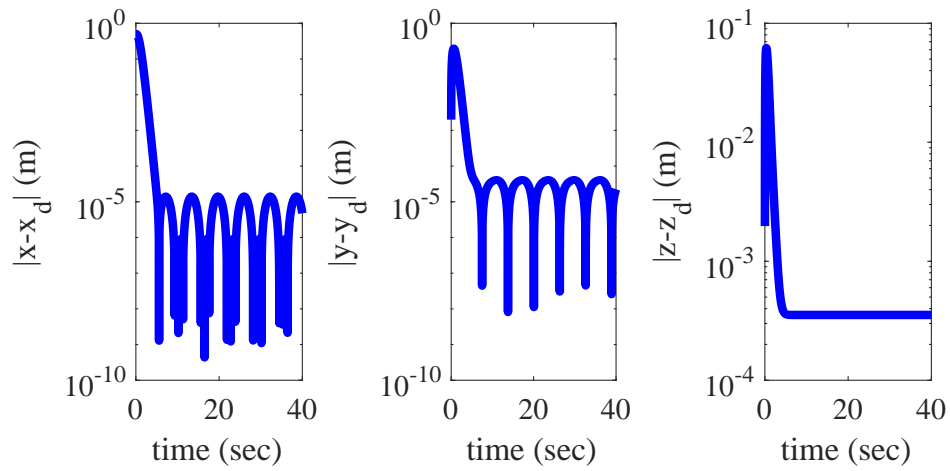
Slika 5.5: Varijable stanja pojednostavljenog dinamičkog modela kvadkoptera



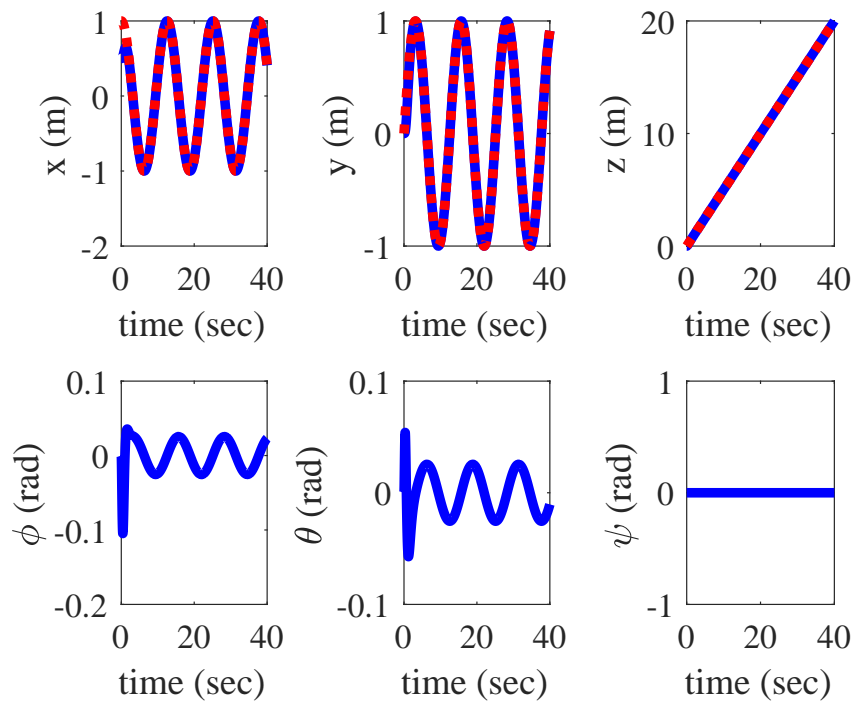
Slika 5.6: Slijeđene referentne trajektorije za pojednostavljeni dinamički model



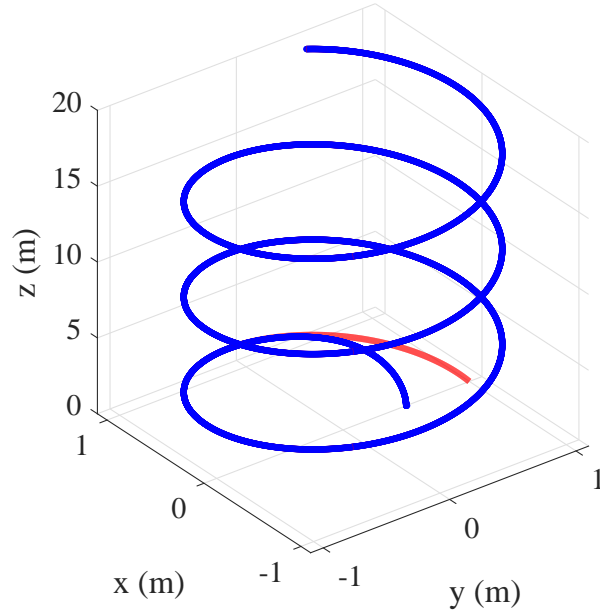
Slika 5.7: Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela



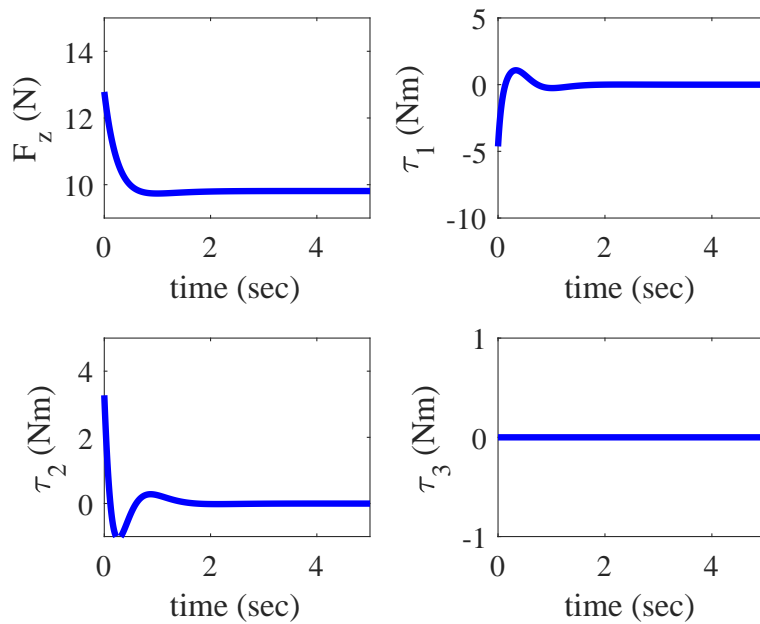
Slika 5.8: Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod pojednostavljenog dinamičkog modela



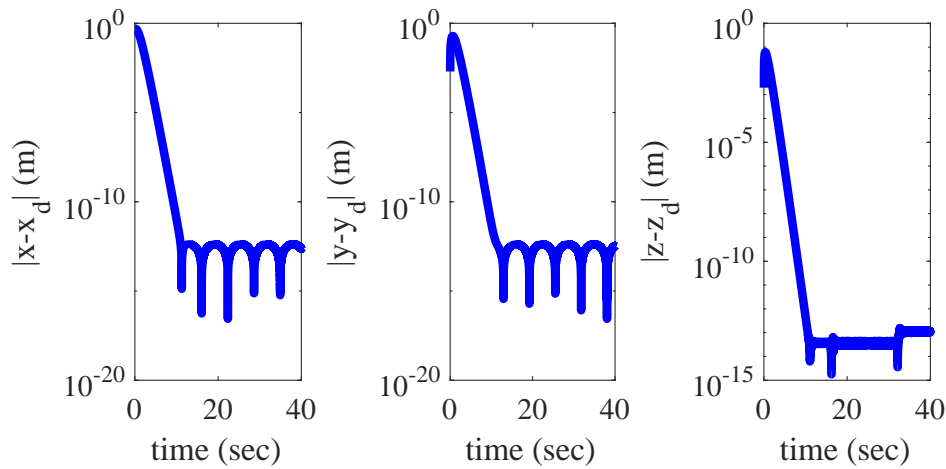
Slika 5.9: Variable stanja najjednostavnijeg dinamičkog modela kvadkoptera



Slika 5.10: Slijeđene referentne trajektorije za najjednostavniji dinamički model



Slika 5.11: Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela

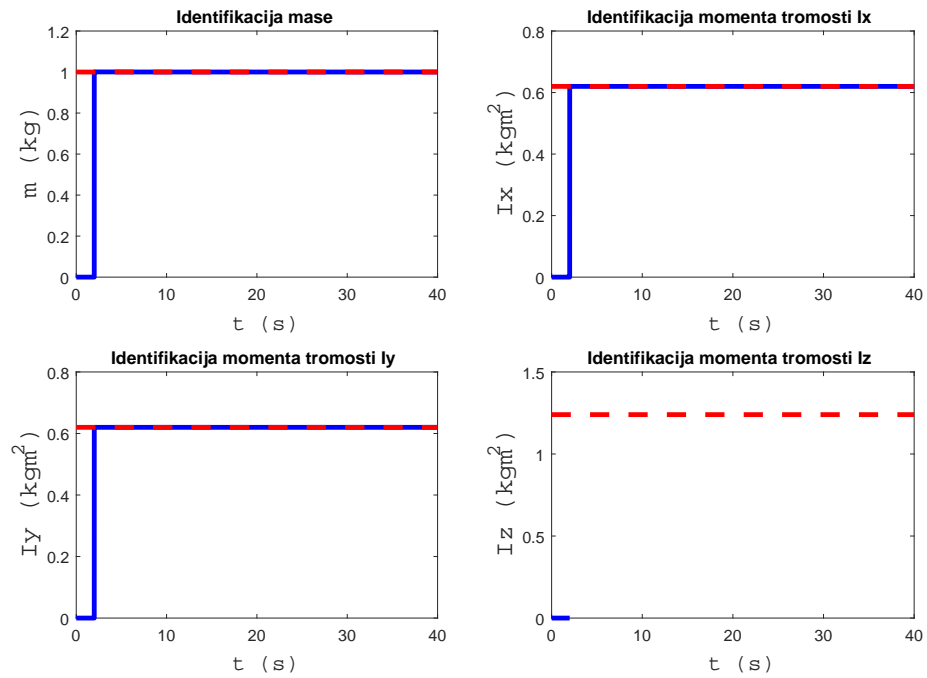


Slika 5.12: Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod najjednostavnijeg dinamičkog modela

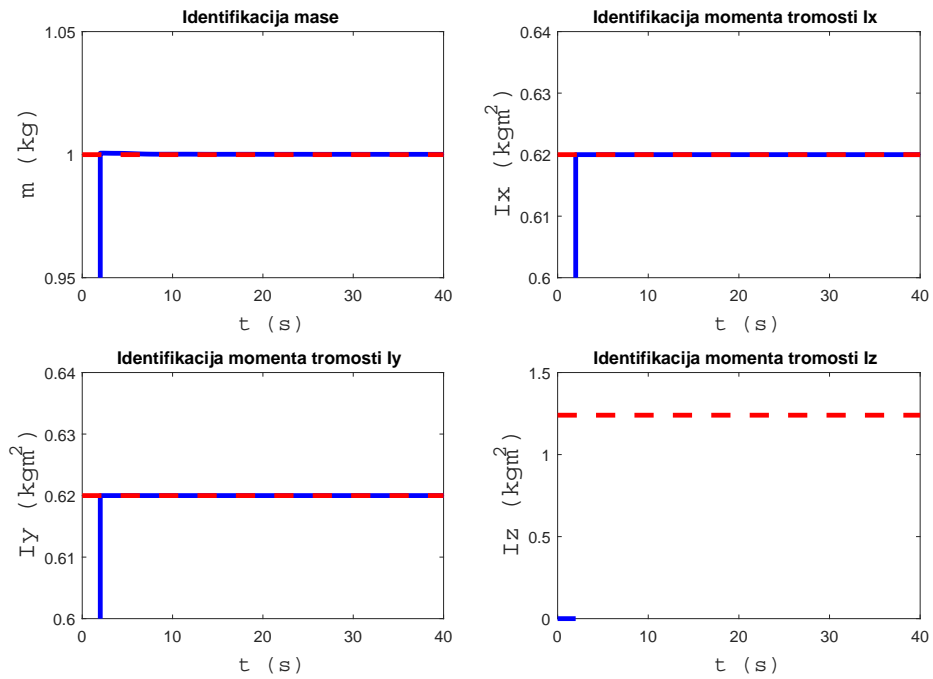
S obzirom na to je izvod identifikacije parametara baziran na pojednostavljenom modelu postavlja se pitanje da li postoji greška u identifikaciji i kolika je kada se primjeni na punom modelu ili najjednostavnijem. Na slici 5.13 bit će prikazana identifikacija parametara kod pojednostavljenog modela. Da bi bolje vidjeli što se događa kada dođe do identifikacije na slici 5.14 se nalazi uvećan prikaz slike 5.13 oko područja interesa. Sada će na isti način biti prikazana identifikacija kod punog modela. Na slici 5.15 prikazana je identifikacija parametara za puni dinamički model. Na prvi pogled se čini da nema razlike u odnosu na identifikaciju kod pojednostavljenog modela ali na uvećanom prikazu na slici 5.16 možemo vidjeti da se pojavljuje mala pogreška kao što je i za očekivati.

Još ostaje provjeriti rezultate kod najjednostavnijeg modela. Na slici 5.17 nalazi se identifikacija parametara kod najjednostavnijeg modela, a na slici 5.18 njeno uvećanje. Razlika između rezultata najjednostavnijeg i pojednostavljenog modela nije vidljiva na ovakvom prikazu. Sada kada smo vidjeli što se događa s pogreškom identifikacije zbog modela možemo provjeriti što se događa kada uključimo šum mjerenja. Šum je između 5 i 10% te je prikazan na slici 5.19. Za pojednostavljeni model slike 5.13 i 5.14 uz dodani šum mjerenja prikazane su ponovo na slikama 5.20 i 5.21. Tako se i za puni model identificirani parametri sa šumom mjerenja nalaze na slikama 5.22 i 5.23 te za najjednostavniji model na slikama 5.24 i 5.25.

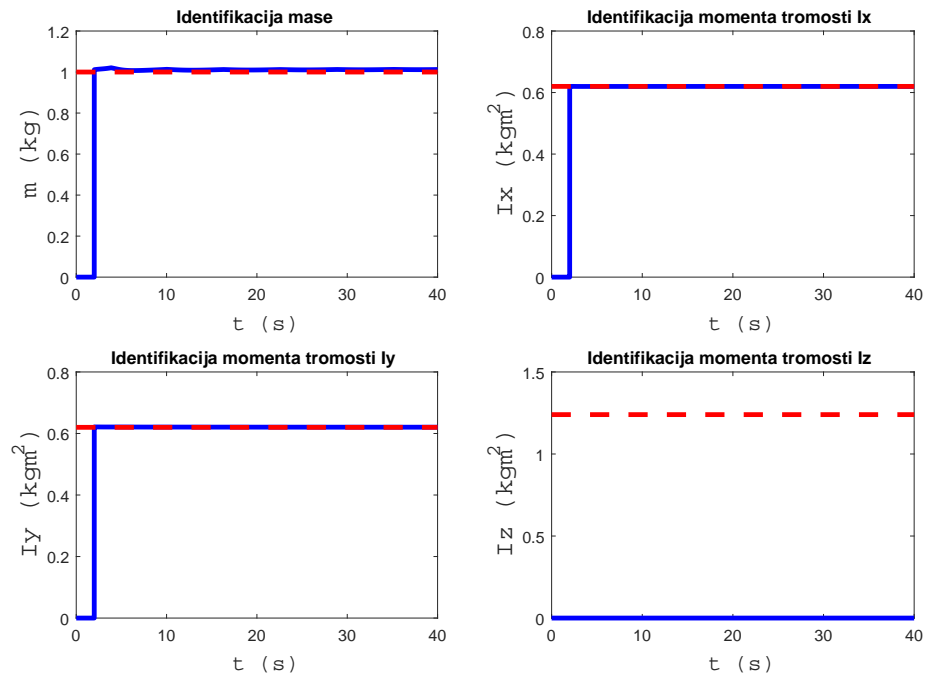
Algebarska metoda identifikacije parametara implementirana je kao dio upravljačkog algoritma opisanog u potpoglavlju 3.7. To je učinjeno tako da se u početnom vremenu (2



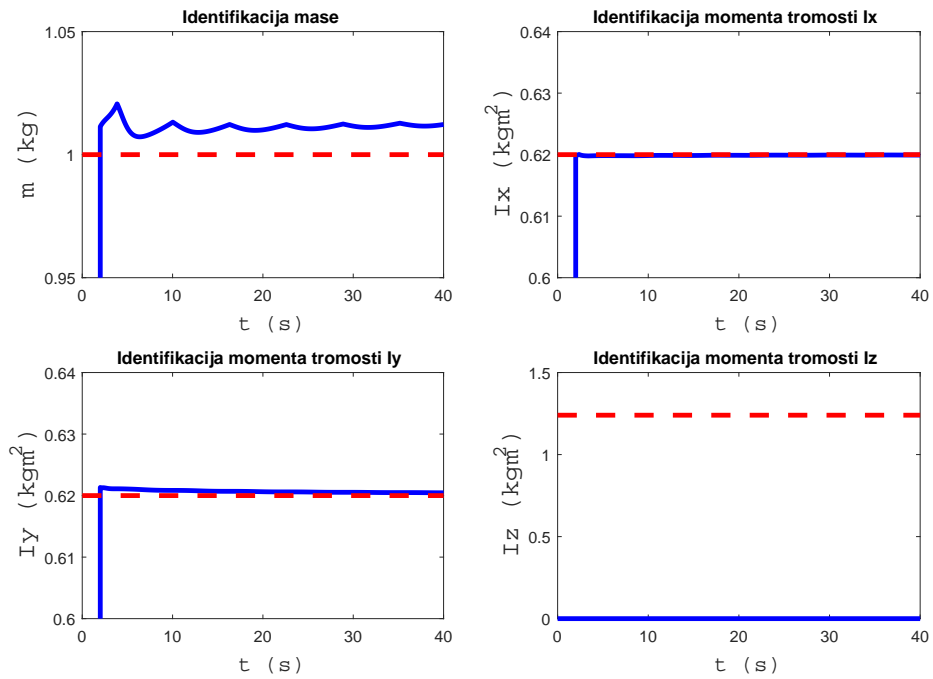
Slika 5.13: Identificirani parametri za pojednostavljeni model



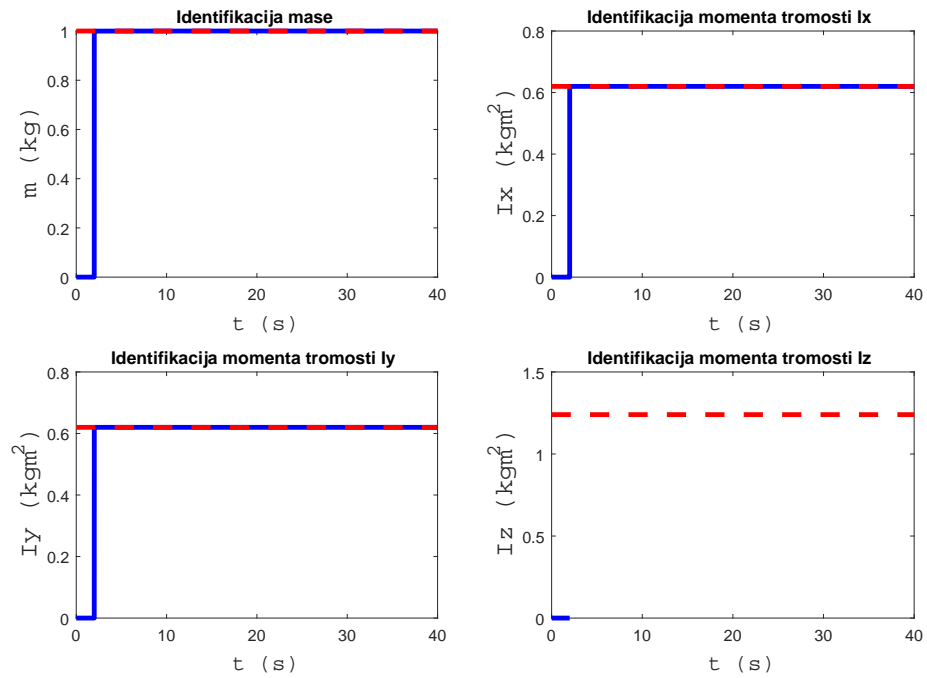
Slika 5.14: Identificirani parametri za pojednostavljeni model s uvećanjem



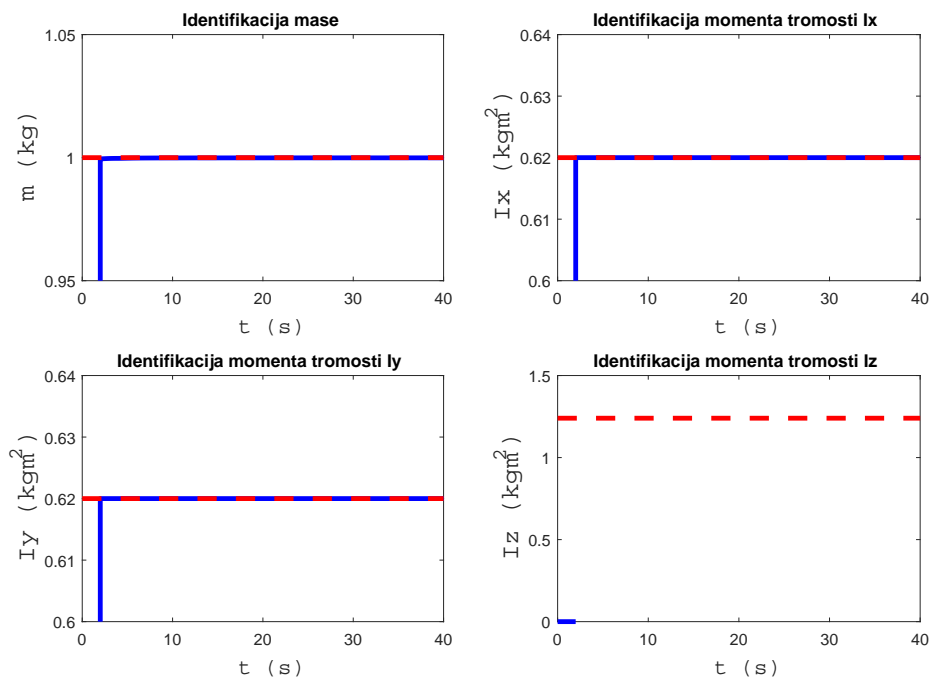
Slika 5.15: Identificirani parametri za puni model



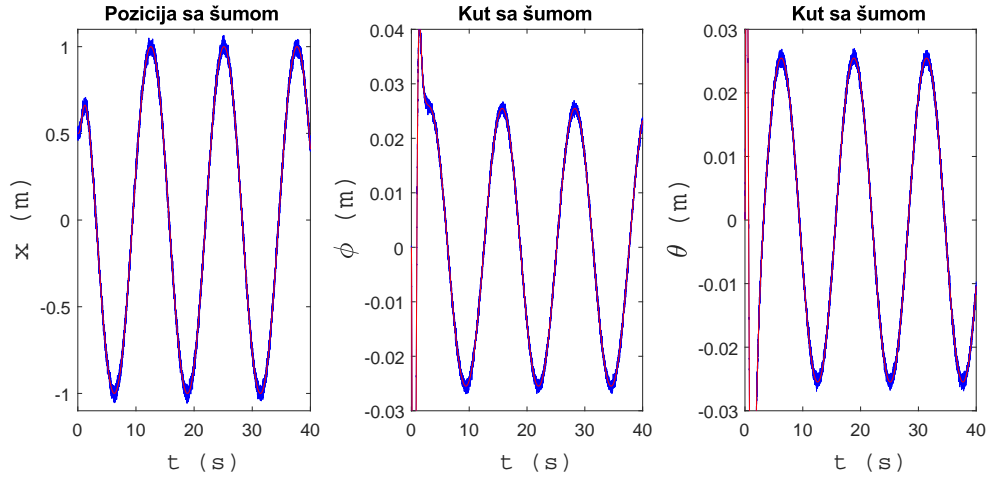
Slika 5.16: Identificirani parametri za puni model s uvećanjem



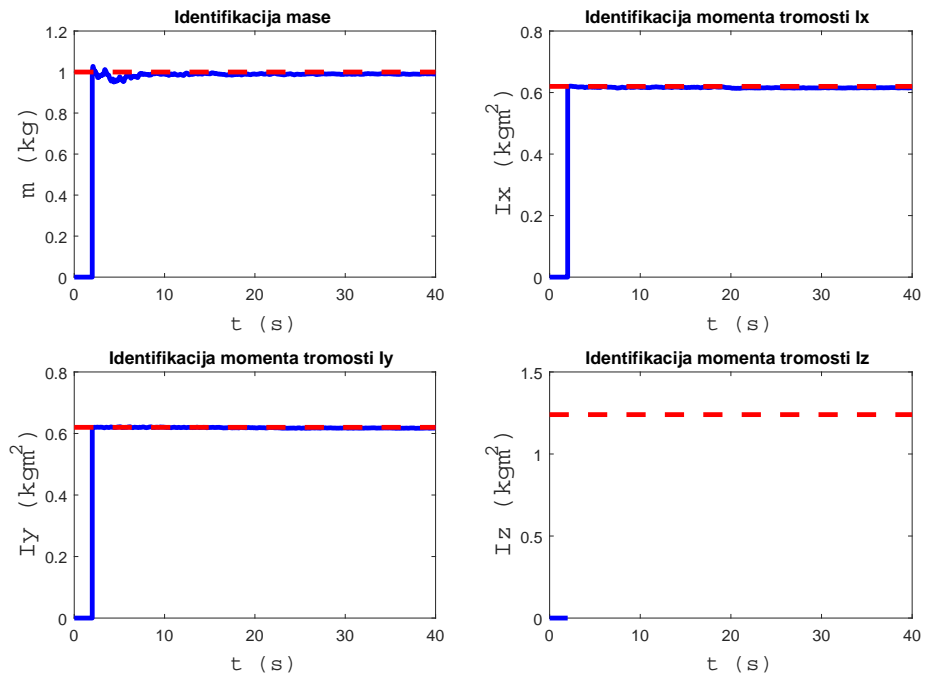
Slika 5.17: Identificirani parametri za najjednostavniji model



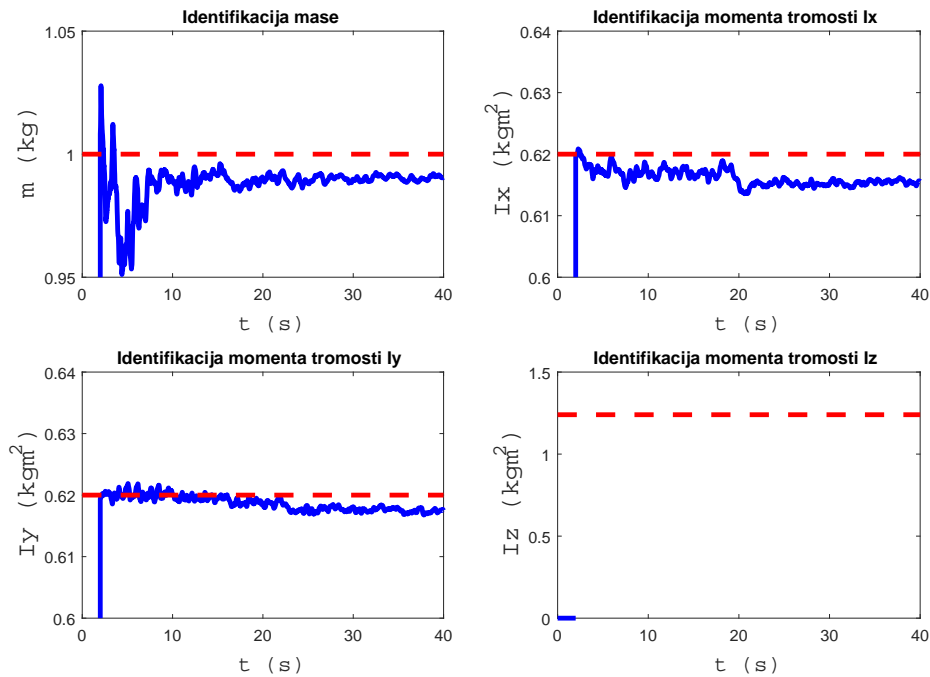
Slika 5.18: Identificirani parametri za najjednostavniji model s uvećanjem



Slika 5.19: Signali s dodanim šumom

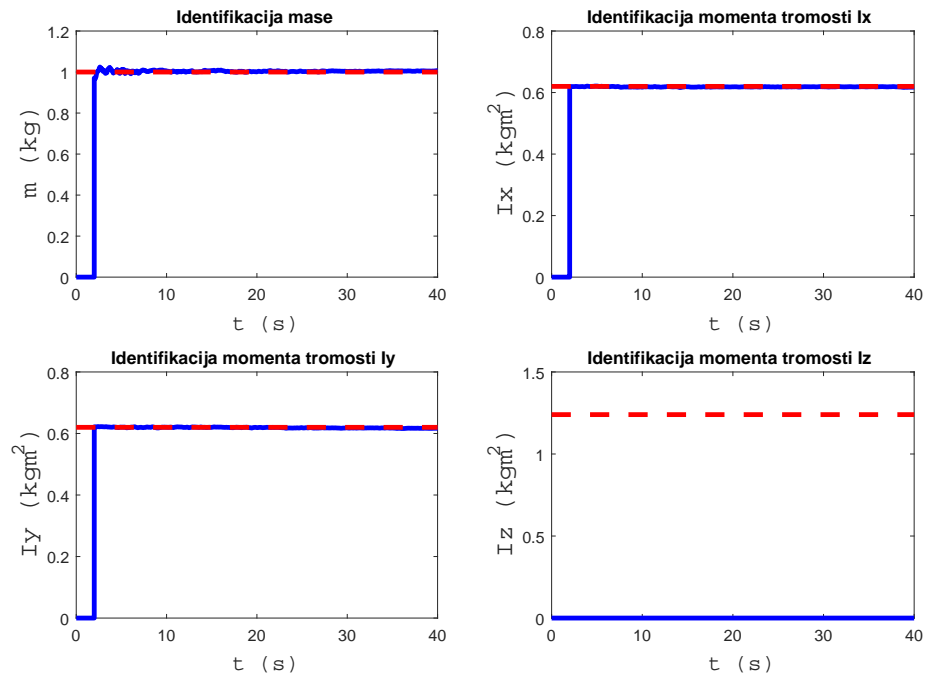


Slika 5.20: Identificirani parametri za pojednostavljeni model uz dodani šum

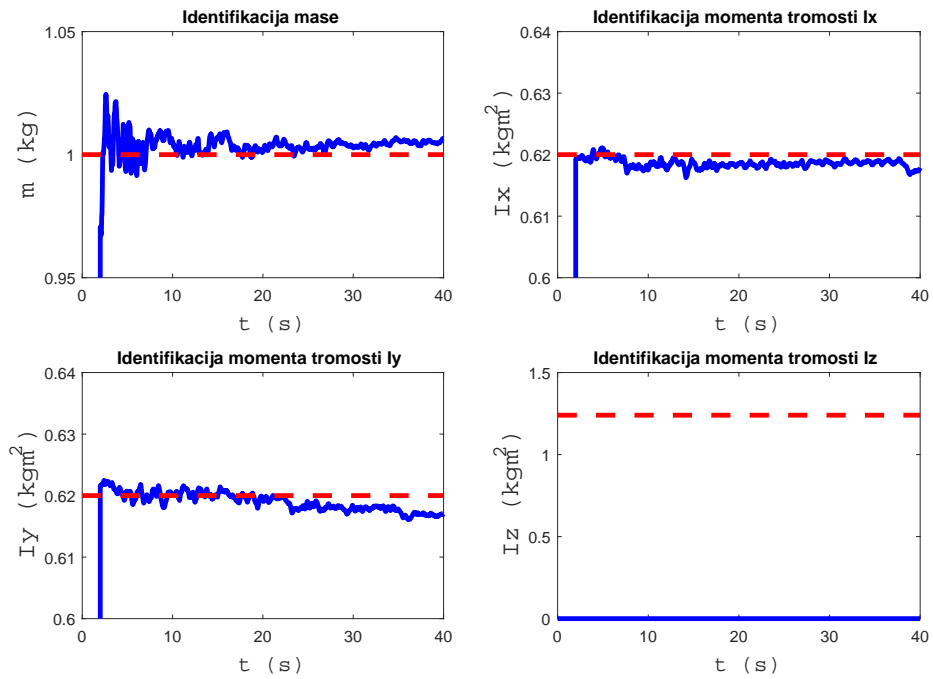


Slika 5.21: Identificirani parametri za pojednostavljeni model s uvećanjem uz dodani šum

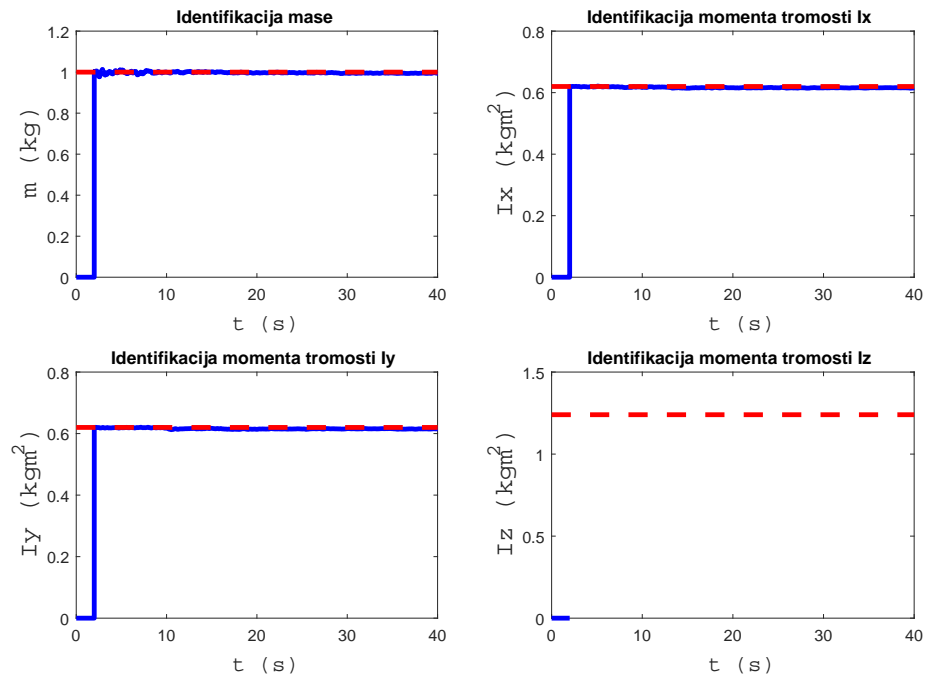
sekunde) za upravljanje koriste neki predodređeni parametri koji se podosta razlikuju od stvarnih, a nakon početnog vremena se identificirani parametri uključuju u upravljanje. Zbog toga što se identificirani parametri koriste u upravljačkom algoritmu možemo to nazvati kao adaptivno upravljanje. Tako za puni model dobivamo rezultate na slikama od 5.26 do 5.30. Na slici 5.26 se nalaze varijable stanja s adaptivnim upravljanjem. Slika 5.27 prikazuje slijeđenje referentne trajektorije s adaptivnim upravljanjem što odmah možemo usporediti sa slikom 5.28 koja prikazuje što se događa kada pokušavamo slijediti referentnu trajektoriju bez adaptivnog upravljanja, odnosno s već spomenutim pogrešnim parametrima sustava. Iz te dvije slike može se jasno vidjeti koje su prednosti adaptivnog upravljanja naspram neadaptivnog. Slike 5.29 i 5.30 prikazuju grešku slijeđenja referentne trajektorije te upravljačke varijable za adaptivno upravljanje. Spomenute slike od 5.26 do 5.30 možemo usporediti s rezultatima sa slika 5.1 do 5.4. Za pojednostavljeni model imamo isti poredak slika od 5.31 do 5.35 koje možemo usporediti sa slikama od 5.5 do 5.8, a za najjednostavniji model slike 5.36 do 5.40 možemo usporediti sa slikama 5.9 do 5.12. Simulacijske rezultate pojednostavljenog modela sa



Slika 5.22: Identificirani parametri za puni model uz dodani šum

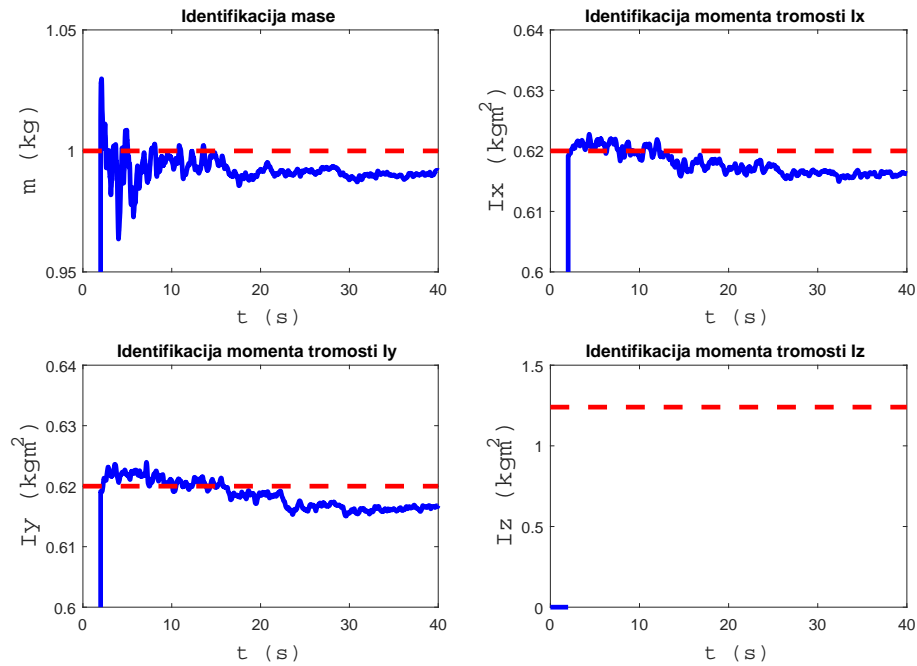


Slika 5.23: Identificirani parametri za puni model s uvećanjem uz dodani šum

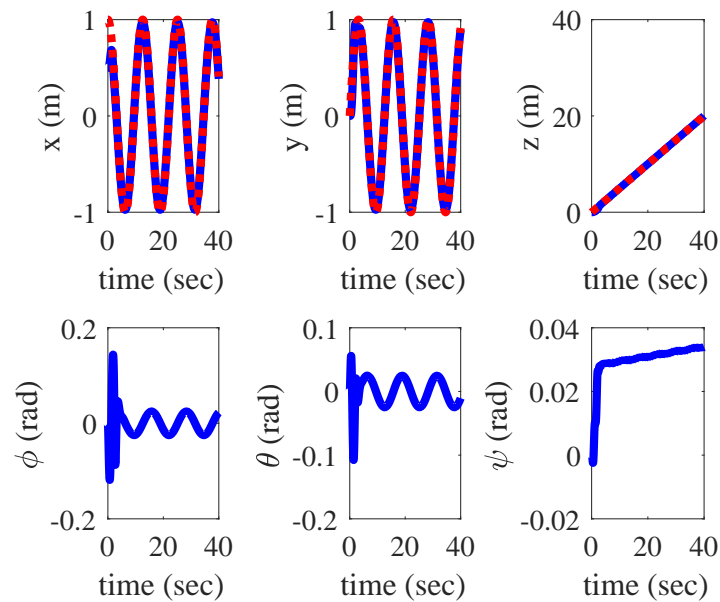


Slika 5.24: Identificirani parametri za najjednostavniji model uz dodani šum

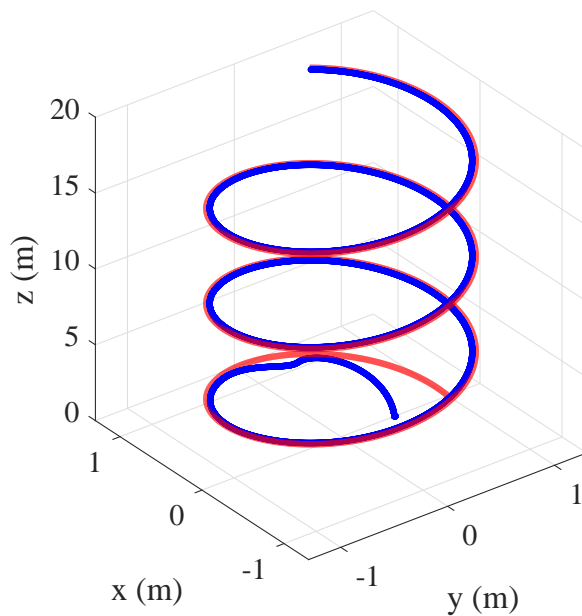
slika od 5.31 do 5.35 možemo usporediti sa slikama od 5.5 do 5.8. Konačno možemo usporediti i najjednostavniji model koji koristi identificirane parametre u upravljanju sa slikom 5.36 do 5.40 s rezultatima od 5.9 do 5.12.



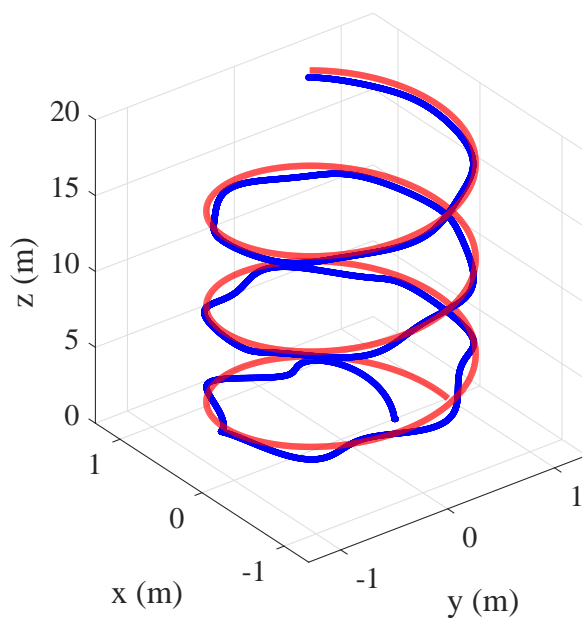
Slika 5.25: Identificirani parametri za najjednostavniji model s uvećanjem uz dodani šum



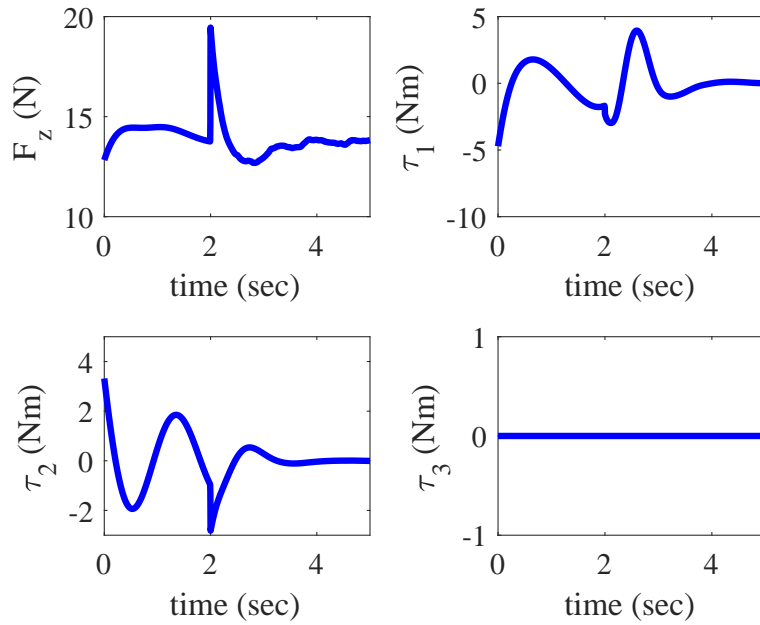
Slika 5.26: Varijable stanja punog dinamičkog modela kvadkoptera uz upravljanje s identificiranim parametrima



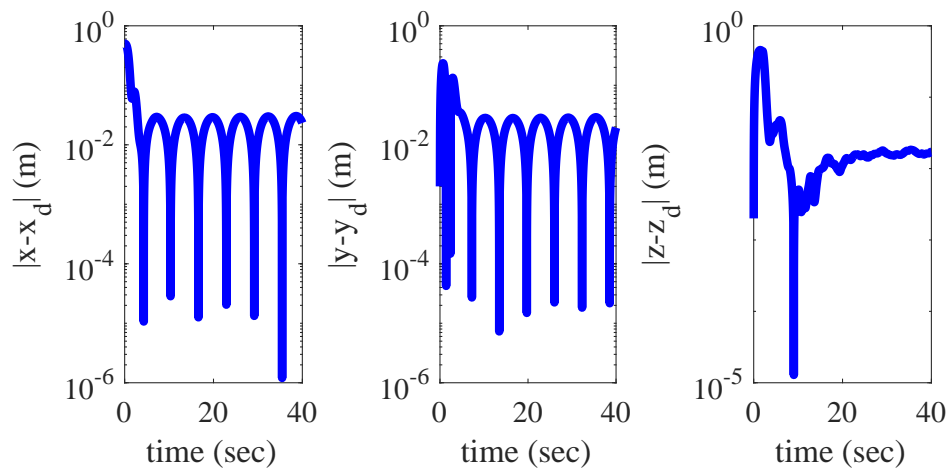
Slika 5.27: Slijeđene referentne trajektorije za puni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima



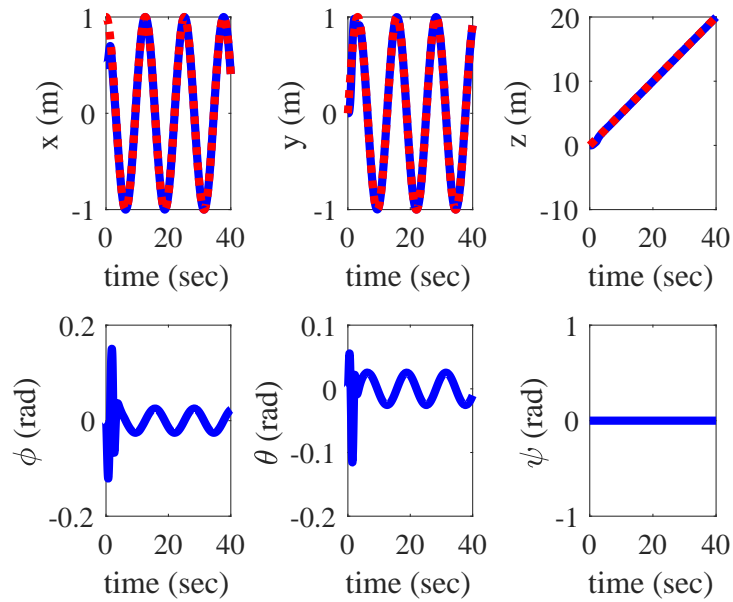
Slika 5.28: Neadaptivno slijeđene referentne trajektorije za puni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima



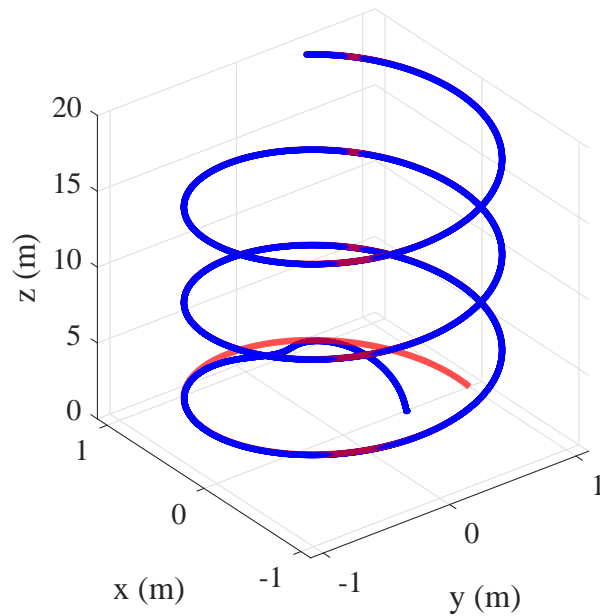
Slika 5.29: Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima



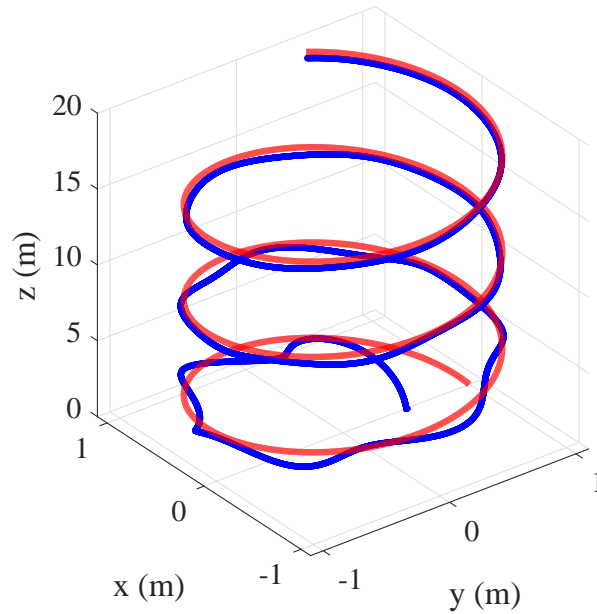
Slika 5.30: Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima



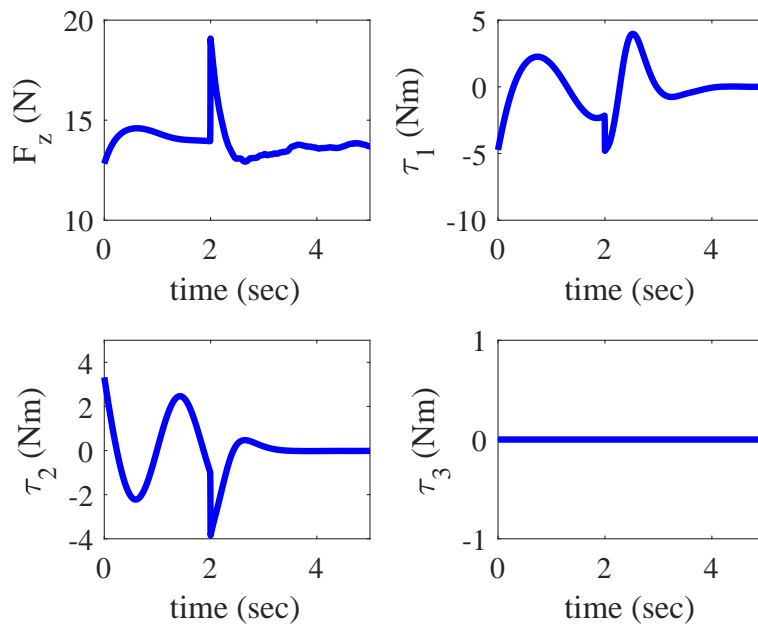
Slika 5.31: Varijable stanja pojednostavljenog dinamičkog modela kvadkoptera uz upravljanje s identificiranim parametrima



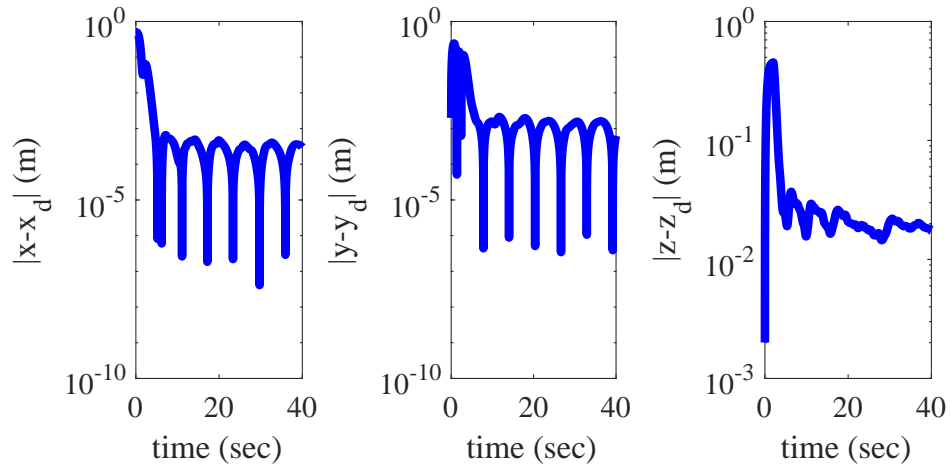
Slika 5.32: Slijedene referentne trajektorije za pojednostavljeni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima



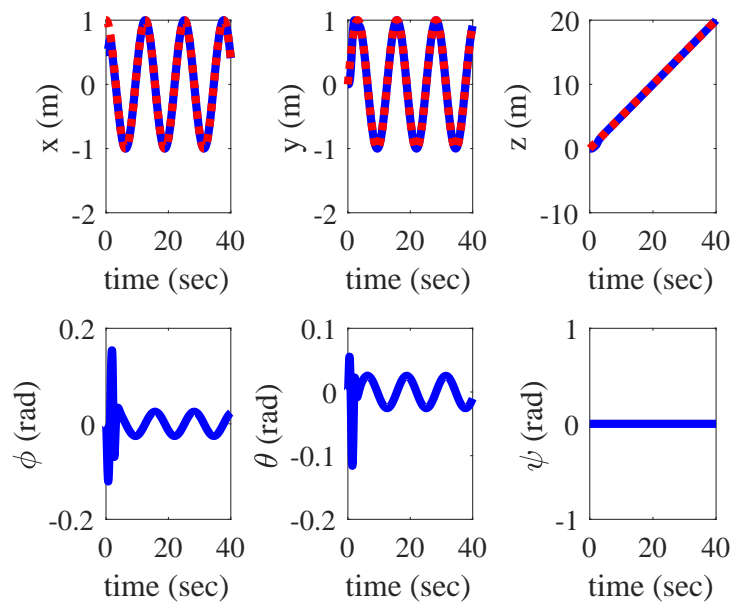
Slika 5.33: Neadaptivno slijeđene referentne trajektorije za pojednostavljeni dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima



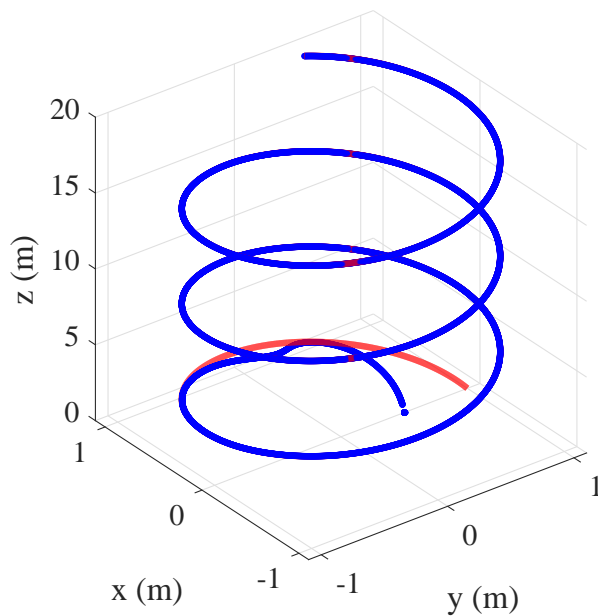
Slika 5.34: Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima



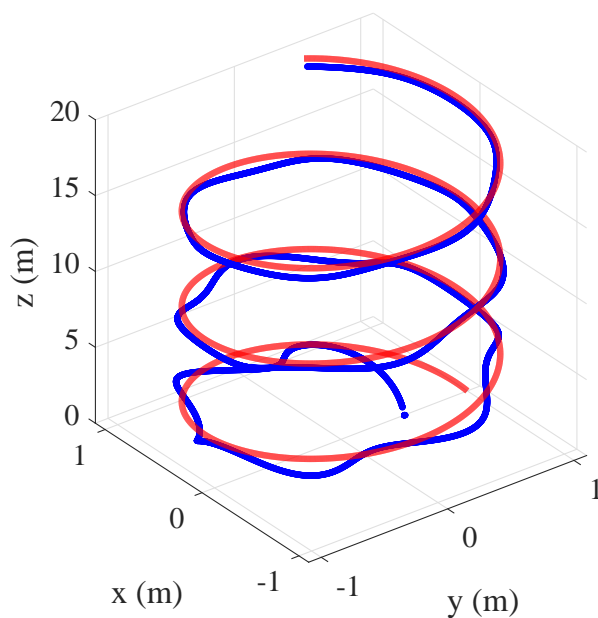
Slika 5.35: Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod pojednostavljenog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima



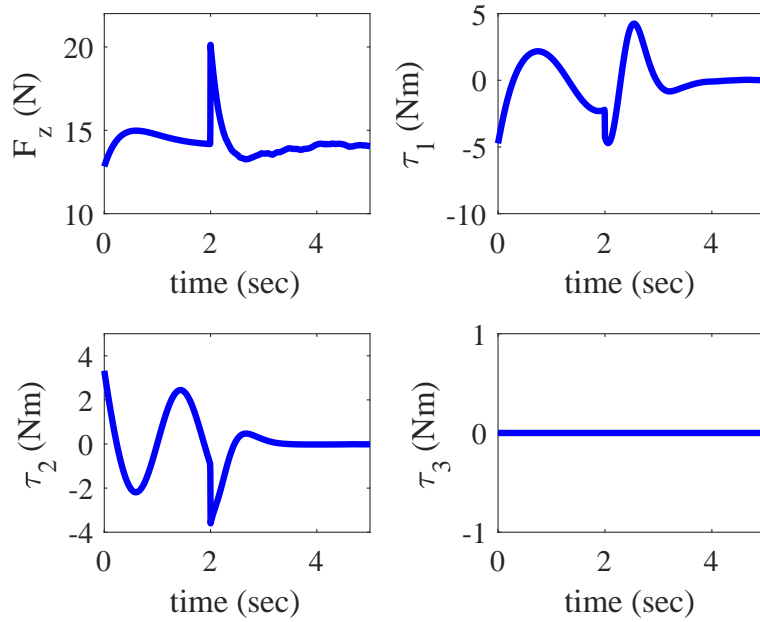
Slika 5.36: Varijable stanja najjednostavnijeg dinamičkog modela kvadrokoptera uz upravljanje s identificiranim parametrima



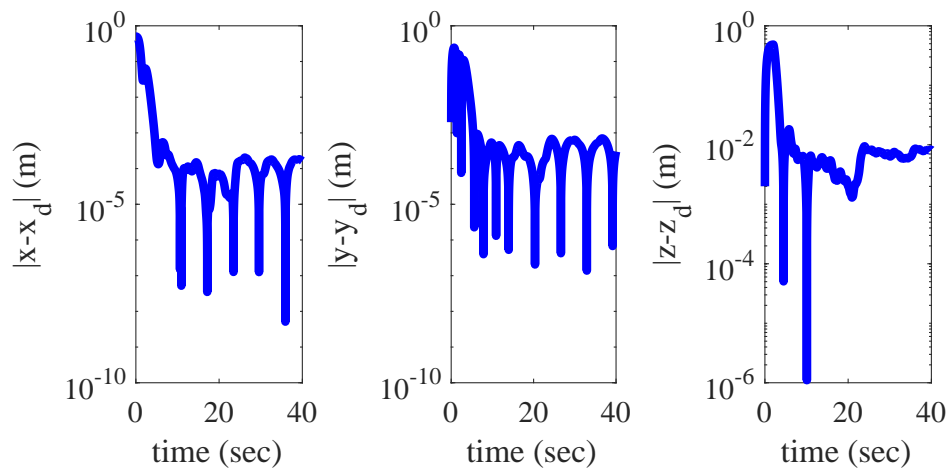
Slika 5.37: Slijeđene referentne trajektorije za najjednostavniji dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima



Slika 5.38: Neadaptivno slijeđene referentne trajektorije za najjednostavniji dinamički model uz upravljanje s identificiranim parametrima



Slika 5.39: Upravljačke varijable kod punog dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima



Slika 5.40: Pogreške slijeđenja referentne trajektorije kod najjednostavnijeg dinamičkog modela uz upravljanje s identificiranim parametrima

6 Zaključak

U sklopu ovog rada obrađene su metode algebarske tehnike za identifikaciju parametara. Provedena je komparativna analiza stabilnosti i robusnosti na šum mjerenja te je kao bolja izabrana metoda frekvencijskog pomaka za kasniju primjenu u identifikaciji parametara kvadkoptera. Objašnjeni su principi rada kvadkoptera te su izvedeni kinematički i dinamički modeli. Na osnovu lineariziranog modela napravljena je sinteza adaptivnog regulatora. Također, na osnovi pojednostavljenog modela izvedena je identifikacija parametara mase i momenata tromosti pomoću metode frekvencijskog pomaka u realnom vremenu. Identificirani parametri su potom korišteni u upravljačkom algoritmu.

Algebarska tehnika je relativno novo područje koje se tek intenzivnije istražuje posljednjih desetak godina. Najčešće korištena ne asimptotska metoda algebarskog deriviranja u osnovi daje dobre rezultate čak i što se tiče robusnosti na šum ali je problem njena nestabilnost te potreba za dodatnim mehanizmima ograničavanja varijabli stanja što je veliki nedostatak kod realnih sustava. Metoda frekvencijskog pomaka, sa stabilnim sustavom te poboljšanim performansama u odnosu na algebarsko deriviranje otvara nove mogućnosti u sintezi regulatora gdje je potrebno poznavati parametre. Također, zbog svoje relativne jednostavnosti i lake implementacije može se iskoristi i tamo gdje je potrebno poznavati samo gornju ocjenu vrijednosti parametra za dobivanje bolje ocijene te samim time i boljih performansi.

A | Prilog

1. CD-R disc

Literatura

- [1] H. Sira-Ramírez, C. G. Rodríguez, J. C. Romero, and A. L. Juárez, *Algebraic Identification and Estimation Methods in Feedback Control Systems*. John Wiley & Sons, 2014.
- [2] H. W. Sorenson, *Parameter estimation: principles and problems*, vol. 9. Marcel Dekker, 1980.
- [3] G. Favier, *Filtrage, modélisation et identification de systèmes linéaires stochastiques à temps discret*. Editions du CNRS, 1982.
- [4] C. F. Gauss and C. H. Davis, *Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections*. Courier Corporation, 2004.
- [5] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [6] L. Ljung, “System identification,” in *Signal analysis and prediction*, pp. 163–173, Springer, 1998.
- [7] M. Fliess and H. Sira-Ramírez, “An algebraic framework for linear identification,” *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 9, pp. 151–168, 2003.
- [8] J. R. Trapero-Arenas, M. Mboup, E. Pereira-Gonzalez, and V. Feliu, “On-line frequency and damping estimation in a single-link flexible manipulator based on algebraic

- identification,” in *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pp. 338–343, IEEE, 2008.
- [9] J.-P. Barbot, M. Fliess, and T. Floquet, “An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs,” in *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, pp. 384–389, IEEE, 2007.
- [10] J. Villagra, B. d’Andrea Novel, M. Fliess, and H. Mounier, “Estimation of longitudinal and lateral vehicle velocities: an algebraic approach,” in *American Control Conference, 2008*, pp. 3941–3946, IEEE, 2008.
- [11] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramírez, “Robust residual generation for linear fault diagnosis: an algebraic setting with examples,” *International Journal of Control*, vol. 77, no. 14, pp. 1223–1242, 2004.
- [12] J. Kasac, T. Zilic, V. Milic, and A. Jokic, “Frequency-shifting-based stable on-line algebraic parameter identification of linear systems.” *Journal of the Franklin Institute*, online 22 March 2017. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2017.03.008>.
- [13] C. Garcia-Rodriguez, J. A. Cortés-Romero, and H. Sira-Ramirez, “Algebraic identification and discontinuous control for trajectory tracking in a perturbed 1-DOF suspension system,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3665–3674, 2009.
- [14] J. R. Trapero, H. Sira-Ramírez, and V. Feliu Batlle, “On the algebraic identification of the frequencies, amplitudes and phases of two sinusoidal signals from their noisy sum,” *International Journal of Control*, vol. 81, no. 3, pp. 507–518, 2008.
- [15] J. R. Trapero, H. Sira-Ramírez, and V. F. Batlle, “An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal,” *Signal processing*, vol. 87, no. 6, pp. 1188–1201, 2007.
- [16] P. Castillo, R. Lozano, and A. E. Dzul, *Modelling and control of mini-flying machines*. Physica-Verlag, 2006.
- [17] T. Bresciani, “*Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter*.” Lund University, 2008. MSc Theses.

- [18] R. Beard, “*Quadrotor dynamics and control.*” Brigham Young University, 2008.
- [19] D. Majetić, J. Kasać, and D. Brezak, *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja - Viševarijabilni sustavi.* Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [20] J. Kasać, S. Stevanović, T. Žilić, and J. Stepanić, “Robust output tracking control of a quadrotor in the presence of external disturbances,” *Transactions of FAMENA*, vol. 37, no. 4, pp. 29–42, 2014.
- [21] D. Kotarski, P. Piljek, H. Brezak, and J. Kasać, “Chattering-free tracking control of a fully actuated multirotor with passively tilted rotors,” *Transactions of FAMENA*, vol. 42, no. 1, pp. 1–14, 2018.